Panorama de la Lógica Modal

Héctor Jiménez Salazar
Fac. de Ciencias Físico Matemáticas, UAP
hjimenez@fcfm.buap.mx

julio, 1997

La lógica modal aparece desde la época de Aristóteles aunque su formalizacion culminó en la segunda mitad del presente siglo. Kripke, por ejemplo, fue el primero (1959) quien propuso una semántica para la lógica modal.

En principio, la modalidad se relaciona con los conceptos de necesidad y posibilidad (representados por los operadores $\Box$ y $\Diamond$). Entre los conceptos que se emplean como modalidades están la creencia, el conocimiento, la obligación y la eternidad, que corresponden a la lógica doxástica, epistémica, deóntica y temporal, respectivamente. En el presente capítulo se exponen algunos sistemas modales. Específicamente, trataremos cada uno de los anteriores sistemas, para lo cual se han propuesto las siguientes secciones:

1. Preliminares.
2. Lenguaje de proposiciones (L_0).
3. Lenguaje de predicados (L_1).
4. Lenguaje modal de proposiciones (L_0^M).
5. Lenguaje multimodal de proposiciones ($L_0^{M_n}$).
6. Lenguaje multimodal temporal ($L_0^{M_2}$).
7. Lenguaje temporal ($L_0^{M_t}$).
8. Lenguaje modal de predicados (L_1).
9. Lenguaje de creencias y conocimiento (L^B).

10. Cláusulas Modales de Horn.

1 Preliminares

La lógica, en general, pretende analizar las construcciones de un lenguaje natural. Por tal, muchos elementos lógicos están motivados en las formas lingüísticas. En particular, la lógica modal considera las modalidades que ocurren en enunciados naturales. En primer lugar examinaremos implicitamente la lógica alética cuyo concepto de partida es la "necesidad" y que se representa mediante el operador $\Box$, además de su dual, el operador modal $\Diamond$, que viene a representar la "posibilidad".

2 L_0

Aunque suponemos conocidos a L_0 y a L_1, en esta sección y en la siguiente, presentamos como referencia los sistemas lógicos clásicos: el cálculo de proposiciones y el cálculo de predicados. Ya que a partir de éstos haremos extensiones hacia diversos sistemas modales.

2.1 Sintaxis de L_0

Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de proposiciones. L_0 es un lenguaje proposicional y sus fórmulas no son otras que las que se construyen de acuerdo a los puntos siguientes

- Cada proposición es una fórmula
- Si A y B son fórmulas también lo son:
  - $\neg A$,
  - $(A \wedge B)$,
  - $(A \vee B)$,
  - $(A \rightarrow B)$

2.2 Semántica de L_0

Sea B_2 el conjunto $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. $\mathcal{I}$ es una función de interpretación que asigna un valor de B_2 a cada elemento de L_0, de acuerdo a las siguientes reglas:

- A cada proposición P le es asignado un valor de B_2, $\mathcal{I}(P)$.
- Se asigna un valor de acuerdo al tipo de fórmula:
  - el valor opuesto de $\mathcal{I}(A)$ a $\neg A$,
  - $\mathbf{V}$ a $(A \wedge B)$ si y sólo si $\mathcal{I}(A)$ e $\mathcal{I}(b)$ son $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ en caso contrario,
  - $\mathbf{F}$ a $(A \vee B)$ si y sólo si $\mathcal{I}(A)$ e $\mathcal{I}(B)$ son $\mathbf{F}$, $\mathbf{V}$ en caso contrario,
  - $\mathbf{F}$ a $(A \rightarrow B)$ si y sólo si $\mathcal{I}(A) = \mathbf{V}$ e $\mathcal{I}(B) = \mathbf{F}$, $\mathbf{V}$ en caso contrario.

3 L_1

Contamos, para la definición del lenguaje L_1, los siguientes elementos:

- **Constantes** $a, b, c, \ldots$
- **Variables** $x, y, \ldots$
- **Nombres de funciones** $f, g, \ldots$
- **Nombres de predicados** $P, Q, \ldots$
- **Términos** Recursivamente, una constante, variable o la aplicación de una función de aridad n a n términos
- **Átomos** La aplicación de un predicado de aridad n a n términos.

Las fórmulas no son otras que las generadas por las indicaciones siguientes:

- Un átomo es una fórmula.
- Si A y B son fórmulas también lo son:
  - $\neg A$,
  - $(A \wedge B)$,

- $(A \vee B)$,
- $(A \rightarrow B)$,
- $(\forall x A)$,
- $(\exists x A)$

3.1 Semántica de L_1

Un modelo $m = \langle \mathcal{U}, v, g \rangle$ para L_1, contiene

- un dominio de interpretación, $\mathcal{U}$,
- un mapeo v que asigna una función $v(f) : \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$ a las funciones f de aridad n,
- un subconjunto $v(P) \subset \mathcal{U}^n$ a los predicados P de aridad n,
- una función g que asigna un valor de $\mathcal{U}$ a cada variable.

$[\![\alpha]\!]^m$ es el valor semántico de la expresión α, en el modelo m y $[\![A]\!]^m = \mathbf{V}$ se denota con $\models_m A$. Para las fórmulas A y B de L_1:

- Cualquiera que sea un átomo $P(t_1, \ldots, t_k)$, le es asignado el valor $\mathbf{V}$ si $([\![t_1]\!], \ldots, [\![t_k]\!]) \in [\![P]\!]$.
- De acuerdo a la fórmula es su significado, para
  - $\neg A$, el opuesto de $[\![A]\!]$
  - $(A \wedge B)$, $\mathbf{V}$ si sólo si $[\![A]\!] = \mathbf{V}$ y $[\![B]\!] = \mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ en caso contrario
  - $(A \vee B)$, $\mathbf{V}$ si y sólo si $[\![A]\!] = \mathbf{V}$ o $[\![B]\!] = \mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ en caso contrario
  - $(A \rightarrow B)$, $\mathbf{F}$ si y sólo si $[\![A]\!] = \mathbf{V}$ y $[\![B]\!] = \mathbf{F}$, $\mathbf{V}$ en caso contrario
- $\forall x A$ tiene el significado $[\![A]\!]^{m'} = \mathbf{V}$, con $m' = \langle \mathcal{U}, v, g' \rangle$, $g' = g_{x/d}$, para toda $d \in \mathcal{U}$,
- $\exists x A$ tiene el significado $[\![A]\!]^{m'} = \mathbf{V}$, con $m' = \langle \mathcal{U}, v, g' \rangle$ $g' = g_{x/d}$, para alguna $d \in \mathcal{U}$

3.2 Propiedades de L_0 y L_1

Conviene tener presente que tanto la derivación de fórmulas válidas (teoremas) como su interpretación guardan ciertos lazos de similaridad con las argumentaciones de enunciados en términos proposicionales. Esta similaridad se extiende a las propiedades del sistema lógico. Así como cada uno de los axiomas, la regla de inferencia y el criterio de demostración o de deducción correcta pueden presentar naturalidad, debería poder establecerse una "equivalencia" con la interpretación semántica de fórmulas. Tal propiedad en un sistema lógico se conoce como el cumplimiento de correctitud y completitud. Otra propiedad importante es la decidibilidad. En los sistemas decidibles aseguramos la posibilidad de aplicar un método general para decidir si una fórmula se deriva de los axiomas. Los sistemas L_0 y L_1 tienen las propiedades que a continuación se presentan.

Un sistema axiomático para L_0 es:

A1 $P \to (Q \to P)$

A2 $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A3 $(\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$

MP

$$\frac{P, P \to Q}{Q}$$

Con $\vdash A$ indicamos que A se deriva en el sistema de axiomas.
Para una interpretación $\mathcal{I}$, con $\models A$ indicamos que $\mathcal{I}(A) = \mathbf{V}$.
En L_0 se cumple:

correctitud Si $\vdash A$ entonces $\models A$.

completitud Si $\models A$ entonces $\vdash A$.

decidibilidad Existe un procedimiento efectivo para decidir si $\vdash A$.

3.3 Propiedades de L_1

Un sistema axiomático para L_1 es el mismo que para L_0 más:

A4 $(\forall x(P \to Q)) \to (P \to \forall x Q)$

A5 $(\forall x P \rightarrow P_{x/t})$

GU

$$\frac{P}{\forall x P}$$

En L_1 se cumple:

correctitud Si $\vdash A$ entonces $\models A$.

completitud Si $\models A$ entonces $\vdash A$.

indecidibilidad No existe un procedimiento efectivo para decidir si $\vdash A$.

4 L_0^M

Con muy pocos cambios extendemos, en primer lugar, L_0 hacia un lenguaje modal proposicional:

4.1 Sintaxis L_0^M

L_0^M es un lenguaje modal proposicional con las reglas de construcción:

- Cada proposición es una fórmula
- Si A y B son fórmulas también lo son: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$
- $\Box A$ y $\Diamond A$ son fórmulas si A lo es.

Con el operador modal pretendemos representar:

$$\text{lecturas de } \Box A \begin{cases} \text{alética} & \text{necesariamente } A \\ \text{temporal} & \text{simpre } A \\ \text{doxástica} & \text{se cree } A \\ \text{epistémica} & \text{se sabe } A \\ \text{deóntica} & \text{es obligatorio } A \end{cases}$$

En todos los casos la modalidad introduce un elemento nuevo a la interpretación clásica. Una modalidad lleva a considerar el hecho de que una fórmula puede tener diversos *ámbitos* de interpretación. Por ejemplo, para una lógica temporal su modalidad "siempre" y el dual "alguna vez", en nuestro lenguaje habrá que considerar "todas las posibles veces" para referirnos al significado de estos operadores. Cosa semejante sucede con las otras lecturas del operador $\Box$. A estos ámbitos Kripke se refirió como *mundos posibles* dentro de la formalización semántica de la lógica modal.

4.2 Semántica de L_0^M

Un modelo m es una terna $\langle W, R, v\rangle$ donde
- W es un conjunto de puntos (mundos posibles),
- $R \subset W \times W$, es la relación de accesibilidad entre puntos y
- $v : \mathcal{P} \to 2^W$ es una función que asigna a cada proposición P un conjunto de puntos donde toma el valor **V**.

La fórmula A es válida en el punto $w \in W$, $\models^w A$:

- cuando A es una proposición y $w \in v(A)$,
- si A tiene la forma:
  - $\neg P$ y si $\not\models^w P$,
  - $(P \wedge Q)$ y si $\models^w P$ y $\models^w Q$,
  - $(P \vee Q)$ y si $\models^w P$ o $\models^w Q$,
  - $(P \to Q)$ y no sucede que $\models^w P$ y $\not\models^w Q$,
  - $\Box P$ y $\models^{w'} P$ para todo w' tal que wRw'.
  - $\Diamond P$ y $\models^{w'} P$ para algún w' tal que wRw'.

4.3 Propiedades de L_0^M

El uso de un sistema axiomático se hace considerando las propiedades de los conceptos modales en las expresiones de que trata nuestro lenguaje. Consideremos un mundo w de un modelo m y supongamos que $\models_m \Box A$. Ya que debe cumplirse para todo w', $\models_m^{w'} A$ si wRw', es necesario y suficiente que R sea reflexiva para que $\models_m A$, Esto es:

$$\text{R es Reflexiva} \quad \text{si y sólo si} \quad \Box A \to A$$

Se han caracterizado diversos sistemas axiomáticos para la lógica modal. El siguiente teorema expresa algunas propiedades de los modelos con respecto a los axiomas de un sistema:

Teorema 1 *Sea m un modelo $\langle W, R, v\rangle$, de L_0^M, R cumple alguna de las siguientes propiedades si y sólo si el sistema formal de L_0^M contiene el axioma correspondiente:*

(Reflexivo)	$\forall s(sRs)$:	$\Box A \to A$	(**T**)
(Simétrico)	$\forall s \forall t(sRt \to tRs)$:	$A \to \Box\Diamond A$	(**B**)
(Serial)	$\forall s \exists t(sRt)$:	$\Box A \to \Diamond A$	(**D**)
(Transitivo)	$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge tRu \to sRu)$:	$\Box A \to \Box\Box A$	(**4**)
(Euclideano)	$\forall s \forall t \forall u(sRt \wedge sRu \to tRu)$:	$\Box A \to \Box\Diamond A$	(**5**)

En L_0^M se cumple:

correctitud Si $\vdash A$ entonces $\models A$.

completitud Si $\models A$ entonces $\vdash A$.

decidibilidad Existe un procedimiento efectivo para decidir si $\vdash A$.

5 $L_0^{M_n}$

Pasemos ahora a una generalización del lenguaje modal L_0^M para abarcar varias modalidades. Un lenguaje multimodal es aquel que integra más de una modalidad. Si designamos a las posibles modalidades como miembros del conjunto $\{a_j | j \in J\}$, definimos dos operadores para cada modalidad: $[a_j]$ y $<a_j> \doteq \neg[a_j]\neg$.

5.1 Sintaxis de $L_0^{M_n}$

Las fórmulas del cálculo de proposiciones multimodales se construyen generalizando la definición de fórmula para L_0^M:

- Cada proposición es una fórmula
- Si A y B son fórmulas también lo son: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$
- $[a_i]A$ y $<a_i> A$ son fórmulas si A lo es.

5.2 Semántica de $L_0^{M_n}$

De manera directa se generaliza la semántica de L_0^M. Un modelo m es una terna $\langle W, \mathcal{R}, v\rangle$ donde W es un conjunto de puntos $\mathcal{R} = \{R_i | R_i \subset W \times W\}$ y $v : \mathcal{P} \to 2^W$ una función que asigna a cada proposición un conjunto de puntos donde toma el valor **V**.
La fórmula A es válida en el punto $w \in W$, $\models^w A$:

- cuando A es una proposición y $w \in v(A)$,
- si A tiene la forma: $\neg P, (P \wedge Q), (P \vee Q), (P \to Q)$, y $\not\models^w P, \models^w P$ y $\models^w Q$, $\models^w P$ o $\models^w Q$, no sucede que $\models^w P$ y $\not\models^w Q$, respectivamente.
- si $A = [a_i]P$ y $\models^{w'} P$ para todo w' tal que wR_iw'.
- si $A =< a_i > P$ y $\models^{w'} P$ para algún w' tal que wR_iw'.

6 Sintaxis y Semántica de $L_0^{M_2}$

Un caso particular, ahora de $L_0^{M_n}$ es un lenguaje con dos conceptos modales a partir de los cuales podemos expresar enunciados sobre el tiempo. $L_0^{M_2}$ es un lenguaje temporal con dos modalidades p y f (pasado y futuro). Se tienen cuatro operadores: $[p], < p >, [f]$ y $< f >$. Las fórmulas del cálculo de proposiciones se construyen de acuerdo a $L_0^{M_n}$. La semántica también se hereda directamente de $L_0^{M_n}$.

6.1 Propiedades de $L_0^{M_2}$

Para hacer útil este sistema deben estudiarse las propiedades de R_p y R_f en relación con una axiomática de $L_0^{M_2}$.
Si para todo punto s de un modelo m tenemos $\models_m^s A$, por definición $\models_m^s [p] < f > A$ significa que para todo t, tal que sR_pt, $\models_m^t < f > A$ entonces, debe existir un u, tR_fu, tal que $\models_m^u A$, es decir:

$$\forall s \forall t (sR_pt \to tR_fs) \quad \text{sii} \quad \models A \to [p] < f > A$$

Las relaciones R_p y R_f pueden conjuntarse en una sola relación: R.

Un sistema temporal con modalidades (*siempre en el pasado, alguna vez en el pasado, siempre en el futuro, alguna vez en el futuro*), se caracteriza por:

Axiomas Los de L_0^M y:

$$[f](A \to B) \to ([f]A \to [f]B)$$

$$[p](A \to B) \to ([p]A \to [p]B)$$

$$A \to [p] < f > A$$

$$A \to [f] < p > A$$

Reglas Las de L_0^M y:

$$\frac{A}{[f]A}$$

$$\frac{A}{[p]A}$$

Otras propiedades surgen de consideraciones acerca del tiempo:

Infinitud del tiempo:

$$[p]A \to < p > A$$

$$[f]A \to < f > A$$

Densidad del tiempo:

$$[f][f]A \to [f]A$$

$$[p][p]A \to [p]A$$

7 $L_0^{M_t}$

Hemos de partir de los enunciados que expresan conceptos modales para identificar los operadores que incluye el lenguaje. En el lenguaje temporal $L_0^{M_t}$ consideramos conceptos ligado a la especificación y verificación de programas, que conducen al empleo de los operadores: $\bigcirc A$, *se cumple A en el siguiente momento de tiempo* y $A\mathbf{U}B$, *A hasta que B.*

7.1 $L_0^{M_t}$

$L_0^{M_t}$ es un lenguaje modal proposicional con las reglas de construcción:

- Cada proposición es una fórmula
- Si A y B son fórmulas también lo son: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$
- $\bigcirc A$, $A\mathbf{U}B$, $\Box A$ y $\Diamond A$ son fórmulas si A y B lo son.

7.2 Semántica de $L_0^{M_t}$

Un modelo m es una terna $\langle W, R, v\rangle$ donde W es un conjunto de puntos (mundos posibles), $R \subset W \times W$, relación de accesibilidad entre mundos, de tipo funcional y $v : \mathcal{P} \rightarrow 2^W$ una función que asigna a cada proposición un conjunto de puntos donde toma el valor $\mathbf{V}$.
La fórmula A es válida en el punto $w \in W$, $\models^w A$:

- cuando A es una proposición y $w \in v(A)$,
- si A tiene la forma: $\neg P, (P \wedge Q), (P \vee Q), (P \rightarrow Q)$, y $\not\models^w P$, $\models^w P$ y $\models^w Q$, $\models^w P$ o $\models^w Q$, no sucede que $\models^w P$ y $\not\models^w Q$, respectivamente.
- si $A = \Box P$ y $\models^{w'} P$, wR^iw', para todo $i \geq 0$.
- si $A = \Diamond P$ y $\models^{w'} P$, wR^iw', para algún $i \geq 0$.
- si $A = \bigcirc P$ y $\models^{w'} P$ para wRw'.
- si $A = P\mathbf{U}Q$ y $\models^{w'} P$ para wR^iw', $i \geq 0$ o bien, si $\models^{w'} Q$ para algún $j \geq 0$ tal que wR^jw' y $\models^{w''} P$, wR^iw'' para toda i, $0 \leq i < j$.

7.3 Axiomas de $L_0^{M_t}$

Como ha sido mencionado, los axiomas de un sistema se desprenden de las propiedades observadas en el objeto a modelar. La propiedad más importante de $L_0^{M_t}$ es la funcionalidad de su relación (para todo estado s existe un único t tal que (sRt)).
Esto permite tomar como conjunto de estados a los números naturales y como relación a la función sucesor.
Además de los axiomas de L_0^M, se proponen para $L_0^{M_t}$ los siguientes, que de acuerdo al significado de los operadores, éstos resultan naturales:

1. $\bigcirc(A \to B) \to (\bigcirc A \to B)$
2. $\neg \bigcirc A \leftrightarrow \bigcirc \neg A$
3. $\Box A \to (A \wedge \bigcirc A \wedge \bigcirc \Box A)$
4. $\Box(A \to \bigcirc A) \to (A \to \Box A)$
5. $A\mathbf{U}B \to (B \vee (A \wedge \bigcirc(A\mathbf{U}B)))$
6. $[C \wedge \Box(C \to (B \vee (A \wedge \bigcirc C)))] \to A\mathbf{U}B$

8 L_1^M

Hasta ahora hemos realizado generalizaciones partiendo sólo de L_0, pero también es posible hacer esto con L_1. Enseguida señalaremos los cambios que se requiere para obtener un lenguaje modal de predicados.

- L_1^M es un lenguaje de predicados modales. Las fórmulas de este cálculo de predicados se construyen de acuerdo a L_1 agregando que:
  - Si A es una fórmula también lo son $\Box A$ y $\Diamond A$.
- Su semántica tiene cambios importantes de acuerdo a la interpretación de los operadores modales. Por ejemplo, considerar un dominio para cada mundo, o bien que el dominio sea el mismo para todos los mundos. Tomando esta última la definición de modelo conserva características de L_1 y L_0^M. Se entiende $m = \langle W, R, \mathcal{U}, v, g \rangle$ con el mismo sentido que en L_0^M y ahora:
  - un mapeo v que asigna una función $v(f, w) : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$ a las funciones f de aridad n,
  - un subconjunto $v(P, w) \subset \mathcal{U}^n$ a los predicados P de aridad n,
- La interpretación para las fórmulas de L_1^M es la misma que se indica para las fórmulas de L_0^M y las consideraciones para las variables que se definen para L_1.
- Las configuraciones de axiomas caracterizadas por la relación entre mundos posibles son adicionadas normalmente por alguna fórmula de Barcan:

$$(\forall x \Box A) \to (\Box \forall x A)$$

- No hay decidibilidad empero es posible hacer restricciones sobre el tipo de fórmulas permitidas y elegir un sistema axiomático que ofrezca utilidad para mecanizar las demostraciones. Esto se verá en una sección posterior.

9 L^B

Consideraremos un lenguaje multimodal. Se parte del concepto de creencia adjudicado a un agente. Cada agente S es capaz de ejercer la creencia P, $[S]P$. La variante que aquí presentamos es debida a Konolige quien propuso una semántica diferente a la de Kripke. Haremos antes una serie de planteamientos para después presentar la sintaxis y semántica de este lenguaje.

1. La noción de creencia (ϕ) en un agente ($[S]$) es que al interior de éste se representa un conjunto de enunciados (Bel). Para ello se usa un lenguaje interno (L). El conjunto de creencias es manejado por un conjunto de reglas ($\mathcal{R}$).

2. Mediante un lenguaje externo (L^B) se expresa el comportamiento del agente. L^B contiene al lenguaje interno.

3. Una estructura deductiva $\langle B, \mathcal{R} \rangle$ representa un conjunto de creencias $Bel \doteq \{\phi | B \vdash_{\mathcal{R}} \phi\}$.

4. Se supone la cerradura deductiva en los sistemas de creencia: Si $B \vdash_{\mathcal{R}} \phi$ y $B, \phi \vdash_{\mathcal{R}} \psi$ entonces $B \vdash_{\mathcal{R}} \psi$.

9.1 Sintaxis de L^B

Un lenguaje de creencias L^B se define a partir de L_1, un conjunto de agentes $\{S_1, S_2, \dots\}$ y las siguientes reglas:

1. Toda fórmula de L_1 es una fórmula de L^B.

2. Si ϕ es una fórmula de L_1 entonces $[S_i]\phi$ es una fórmula de L^B

9.2 Semántica de L^B

En principio toda fórmula del tipo $[S_i]\phi$ significa que $\phi \in B(S_i)$. Y en general, al tratar varios agentes no todos tienen que manejar las mismas reglas. Un modelo $B(L_1, \rho)$ es un cuádruple $\langle \mathcal{U}, v, g, D \rangle$ donde los primeros tres elementos tienen el mismo sentido que en el caso de L_1 y $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ es un conjunto de estructuras deductivas una para cada agente S_i. Las reglas de d_i se representan por $\rho(i)$. El modelo m satisface a la fórmula ϕ, $\models_m \phi$ si

- Cuando ϕ es un átomo $P(t_1, \dots, t_k)$ y $([\![t_1]\!]^m, \dots, [\![t_k]\!]^m) \in [\![P]\!]^m$.
- ϕ tiene la forma: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B)$, y $\not\models_m A, \models_m A$ y $\models_m B$, $\models_m A$ o $\models_m B$, no sucede que $\models_m A$ y $\not\models_m B$, respectivamente.
- $\phi = \forall x A$ y $\models_{m'} A$ con $m' = \langle \mathcal{U}, v, g', D \rangle$, $g' = g_{x/d}$ para toda $d \in \mathcal{U}$
- $\phi = \exists x A$ y $\models_{m'} A$ con $m' = \langle \mathcal{U}, v, g', D \rangle$, $g' = g_{x/d}$ para algún $d \in \mathcal{U}$
- $A \in Bel(d_i)$ y $\phi = [S_i]A$.

9.3 Características de los modelos

Así como en L_0^M tenemos el Teorema 1, para L^B podemos plantear resumidamente la siguiente tabla:

Caracterización	Condición	Nombre	
$[S]\Gamma \to [S]\phi$ si $\Gamma \vdash \phi$	$Bel(S)$ corr.ycompl.	Razonador ideal	**K**
$[S]\phi \to \phi$	$\phi \in Bel(S) \to true(\phi)$	Conocimiento	**T**
$[S]\phi \to \neg[S]\neg\phi$	$\phi \in Bel(S) \to \neg\phi \notin Bel(S)$	Consistente	**D**
$[S]\phi \to [S][S]\phi$	$\phi \in Bel(S) \to [S]\phi \in Bel(S)$	Introspección+	**4**
$\neg[S]\phi \to [S]\neg[S]\phi$	$\phi \notin Bel(S) \to \neg[S]\phi \in Bel(S)$	Introspección−	**5**

Observemos que las condiciones expresan de una manera simple y natural las características.

10 Cláusulas Modales de Horn

En esta sección examinaremos un problema clásico de la lógica epistémica (el acertijo de los sabios). Antes estableceremos una serie de condiciones hasta llegar a un tipo de fórmulas llamadas cláusulas modales de Horn, luego mostraremos la posibilidad de deducir mecánicamente la solución de este problema clásico.

10.1 Sistema S5

Los axiomas de este sistema son los de L_0 más los siguientes:

1. $\vdash \Box A \rightarrow A$
2. $\vdash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
3. $\vdash \Box A \rightarrow \neg\Diamond\neg A$
4. $\vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$
5. $\vdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

y las reglas de inferencia:

1. $$\frac{\vdash A, \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$$
2. $$\frac{\vdash A}{\Box A}$$

Una fórmula de grado unitario es aquella que contiene al inicio solamente un operador modal.

Teorema 2 *Toda fórmula del sistema S5 es equivalente a una de grado unitario.*

10.2 Simplificación de fórmulas modales

- Nos apoyamos en los axiomas del sistema $S5$ para transformar las fórmulas modales en fórmulas modales unitarias.
- Restringimos las posibles fórmulas a las cláusulas modales de Horn.

10.3 Sintaxis de las cláusulas modales de Horn

1. Una modalidad $\mathbf{M}$ es una secuencia (posiblemente vacía) de operadores modales.

2. Una fórmula modal atómica `fma` es una fórmula atómica `fa` precedida de una modalidad: $\mathbf{M}\mathtt{fa}$.

3. Una fórmula modal conjuntiva `fmc` es una conjunción de fórmulas atómicas modales $\mathtt{fma}_1 \wedge \mathtt{fma}_2 \wedge \ldots$, o una conjunción de fórmulas modales conjuntivas $\mathtt{fmc}_1 \wedge \mathtt{fmc}_2 \wedge \ldots$, o una fórmula modal conjuntiva precedida de una modalidad, $\mathbf{M}\mathtt{fmc}$.

4. Una cláusula modal de Horn es una fórmula modal atómica o, una expresión de la forma:
$\mathbf{M}(\mathtt{fma} \leftarrow \mathtt{fmc})$ o,
$\leftarrow \mathtt{fmc}$.

10.4 Ejemplo de simplificación

- Con $[a][b](p \leftarrow q)$ se obtiene:

$$[a][b]p \leftarrow [a][b]q \tag{1}$$
$$[a]p \leftarrow [a]q \tag{2}$$
$$[b]p \leftarrow [b]q \tag{3}$$
$$p \leftarrow q \tag{4}$$

Para ciertos fines conviene agregar las cláusulas contrapuestas, para aquellas que tengan un sólo antecedente. Esta heurística se empleará en la simplificación.

10.5 Acertijo de los sabios

Un rey desea saber cual de sus tres consejeros es el más sabio.
Pinta una mancha en sus frentes, les dice que cada mancha puede ser blanca o negra y al menos hay una blanca.
Pregunta entonces, quien puede decir el color de su propia mancha.
Después de un tiempo el primer sabio dice:
'no conozco el color de mi mancha'.

Al oír esto el segundo dice tampoco saber el color de su mancha.
El tercer sabio responde 'el color de mi mancha es blanca'.

10.6 Modelación del razonamiento

- Análisis

1. El primer sabio no pudo haber visto dos manchas negras
2. Piensa el tercer sabio que el segundo sabio no pudo haber visto en la frente del tercero una mancha negra pues si esto fuera, el segundo habría sabido que la de él era blanca (ya que por 1 no podría ser negra)
3. Sean representados por A, B y C los tres sabios y las expresiones
   - $[X]P \iff X$ conoce P
   - $b(X) \iff X$ tiene una mancha blanca

- Especificación del conocimiento

1. Cada uno sabe que si su mancha es blanca los otros dos lo saben:
$$[A][B]([C]b(A) \leftarrow b(A))$$
$$[B][A]([C]b(B) \leftarrow b(B))$$
$$[C][A]([B]b(C) \leftarrow b(C))$$
2. Conocen la regla (al menos una blanca):
$$[A][B][C](b(A) \leftarrow \neg b(C), \neg b(B))$$
$$[B][A][C](b(B) \leftarrow \neg b(A), \neg b(C))$$
$$[C][A][B](b(C) \leftarrow \neg b(A), \neg b(B))$$
3. La respuesta del primer sabio:
$$[C][B](\neg[A]b(A))$$

4. La respuesta del segundo sabio:

$$[C][A](\neg[B]b(B))$$

5. La pregunta es:

$$?[C]b(C)$$

- Algunas cláusulas simplificadas

$[B][C]b(A) \leftarrow [B]b(A)$
$[C]b(C) \leftarrow \neg b(A), \neg b(B)$
$\neg b(A) \leftarrow \neg[A]b(A)$
$\neg[B]b(B)$

- Traza del razonamiento

$[C]b(C)$
$\neg b(A), \neg b(B)$
$\neg[A]b(A), \neg b(B)$
$\neg b(B)$
$\neg[B]b(B)$
$\emptyset$

Bibliografía Básica

[1] Cuena, José; *Lógica Informática*, Alianza Informática, 1986.

[2] Fariñas del Cerro, Luis; MOLOG: A System that extends Prolog with Modal Logic, *New Generation Computing*, (4), 1986, 35-50.

[3] Konolige, Kurt; *A deduction model of belief*, Pitman, 1986.

[4] López Pérez, Oliva; *Una extensión de Prolog con lógica modal*, Tesis de Lic. en Computación, FCFM, UAP, 1992.

[5] Thayse, André (Ed.); *From Modal Logic To Deductive Databases*, John Wiley and Sons, 1989.