Cálculo de proposiciones

Héctor Jiménez Salazar
hjimenez@fcfm.buap.mx

enero 15, 2001

Ya que las matemáticas establecen la estructura formal de las demás ciencias, proveyéndolas de un aparato lógico deductivo, es importante esclarecer los alcances del mismo aparato en abstracto.

Los griegos fueron los primeros en aclarar el método matemático en cuanto a su racionalidad, pero es casi a principios del siglo XX que se precisa la naturaleza del razonamiento matemático.

La matemática se apoya en el razonamiento matemático aplicado a entidades matemáticas, las cuales se apartan del mundo sensible, donde es posible abstraer entidades tan perfectas como un polígono regular de cien mil lados inscrito en una circunferencia, a la vez que puede distinguirse de otro, también inscrito, de cien mil un lados. El razonamiento matemático al aplicarse a entidades matemáticas sigue un camino por el que se crea un sistema de verdades coherente, profundo e interesante, lo cual cristaliza el trabajo matemático. Este camino y sus frutos son consumidos por el ejercitador matemático en quien logran convicción, y aún cuando algunas premisas del sistema de verdades no sean completamente satisfactorias o evidentes, podrá continuarse el camino.

La lógica matemática se funda en las deducciones que observamos en el lenguaje ordinario, vía un proceso de abstracción. En un primer acercamiento observamos afirmaciones de un predicado sobre un sujeto y, además, conectivos entre estas afirmaciones (“si-entonces”, “no”, “o”, “y” etc.). Las deducciones se realizan argumentando. Por ejemplo:

Si Sócrates es un hombre entonces Sócrates es mortal.
Sócrates es un hombre.
$\therefore$ Sócrates es mortal.

Aunque en lógica se estudia la forma abstracta de la anterior argumentación, es decir:

$A \to B$
A
$\therefore\ B$

El sistema L, es un caso particular de la lógica de primer orden, esto es el cálculo de proposiciones. Del cual estudiaremos, en primer lugar, propiedades que subyacen a la forma de las expresiones que en él se construyen (axiomática). Veremos que estas propiedades se mantienen interpretando las expresiones (semántica), para concluir: solidez, adecuación y decidibilidad. Propiedades de L que, a grandes rasgos, establecen que es equivalente trabajar con formas y con interpretaciones (solidez-adecuación), y que es posible demostrar una fórmula mecánicamente (decidibilidad).

Consideraremos, para empezar a formalizar este lenguaje, variables que nos permitan representar proposiciones como las anteriormente ejemplificadas, para éstas se usarán las letras $p, q, r, \ldots$, y el caso concreto de alguna proposición con letras $A, B, C, \ldots$. A su vez, las letras $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, representan expresiones.

1 Axiomática

El cálculo informal de proposiciones está motivado por la abstracción de los elementos que participan en una deducción del lenguaje natural. Además de las formas argumentativas, en este cálculo, hemos concebido necesarios otros aspectos como la sustitución.

Con el cálculo formal pretendemos dos fines: a) construir un sistema que, independientemente de los valores de certeza que pudieran recibir las variables, permita identificar las expresiones que son deducibles, y b) complementando lo anterior, identificar las condiciones para que este sistema se corresponda con el del cálculo informal, es decir, que una fórmula sea demostrable cuando sea una tautología y viceversa. De cumplirse estas propiedades en un sistema formal podríamos afirmar que hemos contruido un sistema o teoría fiel al tipo de deducciones que esperamos realizar.

Sin reducir la expresividad del lenguaje simplificaremos el alfabeto, considerando solamente como conectivos a $\sim$ y a $\to$.

1.1 El sistema formal L.

Definición 1 El *sistema formal* L del *cálculo proposicional* está definido por lo siguiente:

1. *Alfabeto de símbolos (infinito).* $\sim, \to, (,), p_1, p_2, \ldots$.
2. *Conjunto de fórmulas bien contruidas (fbc).* Una fbc es:
   (a) Una p_i para toda $i \geq 1$.
   (b) $(\sim \mathcal{A})$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ lo son.
   (c) Únicamente las generadas por los incisos anteriores.
3. *Axiomas.* Hay un número infinito de axiomas, los cuales se generan por los siguientes *esquemas de axioma.* Cada esquema considera cualesquier fbc $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$:

   L1 $(\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$.

   L2 $((\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})))$.

   L3 $(((\sim \mathcal{A}) \to (\sim \mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$.
4. *Reglas de deducción.* En L hay sólo una regla de deducción llamada *modus ponens* (MP), que establece: $\mathcal{B}$ es una *consecuencia directa* a partir de $\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$, para cualesquier formas proposicionales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Definición 2 Una *demostración* en L es una secuencia de fbc's $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ tal que para cada i $(1 \leq i \leq n)$, o bien $\mathcal{A}_i$ es un axioma de L o $\mathcal{A}_i$ es una consecuencia de dos miembros previos de la secuencia, $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{A}_k$, $(1 \leq j, k \leq n)$. Así la secuencia se llama demostración de $\mathcal{A}_n$, y a $\mathcal{A}_n$ un *teorema* de L, denotado por $\vdash_L \mathcal{A}_n$.

Observación 1

a) Veamos que las siguientes fbcs son teoremas:

$$p_1 \to (p_1 \to p_1)$$
$$\sim \mathcal{A} \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \sim \mathcal{A})$$
$$(p_1 \to (p_1 \to p_1)) \to (p_3 \to (p_1 \to (p_1 \to p_1)))$$
$$(\sim (p_3 \to p_4) \to \sim p_5) \to (p_5 \to (p_3 \to p_4))$$

Y muchas más construidas con este criterio. La secuencia de su demostracón es de longitud uno.

b) Además, según la definición anterior, la fbc $p_3 \to (p_1 \to (p_1 \to p_1))$ es un teorema, ya que:

1	$(p_1 \to (p_1 \to p_1)) \to (p_3 \to (p_1 \to (p_1 \to p_1)))$	**L1**
2	$p_1 \to (p_1 \to p_1)$	**L1**
3	$p_3 \to (p_1 \to (p_1 \to p_1))$	MP 1,2

c) Así, una estrategia para demostrar que una fbc es un teorema es aplicar repetidamente uno de los siguientes pasos:

h.1 Verificar si la fbc es instancia de algún axioma (o teorema), o bien,

h.2 (a) Considerar la fbc como consecuente de algún axioma o teorema ($\mathcal{B}$ en $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$).
(b) Tratar de demostrar que el antecedente ($\mathcal{A}$) también es teorema.
(c) Conseguido lo anterior, concluimos por modus ponens la fbc deseada ($\mathcal{B}$).

d) Por ejemplo la fbc $(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)$ no es instancia de algún axioma o teorema conocido. Por tanto, aplicamos la heurística 2. Consideramos, entonces, que es el consecuente de algún axioma. En este caso debemos "encontrar parecido" entre la fbc y el consecuente de un axioma (a). Por inspección, **L1** y **L3** quedan excluidos, y debe usarse **L2**. Así $\mathcal{A}$ es p_1, $\mathcal{B}$ es p_2, y $\mathcal{C}$ es p_1. Tenemos ahora, como dice (b), que demostrar que $p_1 \to (p_2 \to p_1)$ es un teorema. Usando h.1 vemos que ésta es una instancia de **L1**. Resumiendo:

1	$(p_1 \to (p_2 \to p_1)) \to ((p_3 \to p_2) \to (p_1 \to p_1))$	**L2**
2	$p_1 \to (p_2 \to p_1)$	**L1**
3	$(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_1)$	MP 1,2

Ejercicio 1 Demuestre que:

1. $\vdash_L (\mathcal{A} \to \mathcal{A})$.
2. $\vdash_L (\sim \mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$.

Definición 3 Sea Γ cualquier conjunto de fbc de L. Una secuencia de fbc's $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ es una *deducción a partir de* Γ si para cada i $(1 \leq i \leq n)$ se cumple:

1. $\mathcal{A}_i$ es un axioma de L.
2. $\mathcal{A}_i$ es un miembro de Γ.
3. $\mathcal{A}_i$ es una consecuencia directa a partir de miembros anteriores de la secuencia.

Así $\mathcal{A}_n$ se dice *deducible a partir* de Γ, lo cual se expresa como $\Gamma \vdash_L \mathcal{A}_n$.

Observación 2

a) Notemos que para realizar deducciones aplicamos la misma idea que en las demostraciones, agregando la posibilidad de usar alguna premisa (Γ) en los pasos h.1, h.2(a) y h.2(b) de la anterior observación.

b) Por ejemplo, para ver que $\{\mathcal{A}, (\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C}))\} \vdash_L (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$, elegimos a $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ como consecuente del consecuente de **L2**, a $\mathcal{A}$ como $\mathcal{B}$. Tendremos que demostrar, por tanto, el antecedente de **L2**: $\mathcal{B} \to (\square \to \mathcal{C})$, y el antecedente del consecuente de **L2**: $\mathcal{B} \to \square$, donde el rectángulorepresenta una fbc desconocida pero que debemos definir. Para lograr el primer objetivo, revisamos nuestras premisas, y observamos que, justamente, con $\mathcal{A}$ podemos llenar el "hueco" en ambas fbcs. De esta forma determinamos un elemento de la secuencia de la demostración. Hemos de hacer algo semejante con el antecedente del consecuente de **L2**. Tenemos, entonces la siguiente demostración:

1	$(\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}))$	**L2**
2	$\mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$	premisa 2
3	$(\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$	MP 1,2
4	$\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$	**L1**
5	$\mathcal{A}$	premisa 1
6	$\mathcal{B} \to \mathcal{A}$	MP 4,5
7	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	MP 3,6

Ejercicio 2 Demuestre que:

1. $\{\mathcal{A}, (\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\} \vdash_L \mathcal{C}$.
2. $\{\sim\sim \mathcal{A}\} \vdash_L \mathcal{A}$.
3. $\{\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})\} \vdash_L \mathcal{B} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$.

Proposición 1 (Teorema de la deducción) Para cualesquier fbc's $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y un conjunto (posiblemente vacío) de fbcs Γ de L, si $\Gamma \cup \mathcal{A} \vdash_L \mathcal{B}$ entonces $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$.

Corolario 1 Para cualesquier fbc's $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de L, $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}), (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \vdash_L (\mathcal{A} \to \mathcal{C})$.

Proposición 2 Para cualesquier fbc's $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de L, se tienen los teoremas:

1. $(\sim \mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$,
2. $((\sim \mathcal{A} \to \mathcal{A}) \to \mathcal{A})$.

Proposición 3 Para cualesquier fbc's $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y un conjunto (posiblemente vacío) de fbcs Γ de L, si $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ entonces $\Gamma \cup \mathcal{A} \vdash_L \mathcal{B}$.

Ejercicio 3 Demuestre que los siguientes son teoremas de L:

1. $\mathcal{A} \to \sim\sim \mathcal{A}$.
2. $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\sim \mathcal{B} \to \sim \mathcal{A})$.
3. $(\sim (\mathcal{A} \to \mathcal{B})) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$.

2 Semántica

El establecer como dado, aceptar, asertar o afirmar algo como parte de una argumentación será visto como una expresión con *valor de certeza verdadero* o V, y se distinguirá de lo contrario con el valor de certeza *falso*, F. Usamos el principio de composicionalidad, esto es, la veracidad de una argumentación o su validez se precisa de acuerdo a la combinación de los valores de certeza de cada componente de ella. Suponemos, pues, las *tablas de certeza* de los conectivos $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ y $\leftrightarrow$. Conviniendo que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ abrevian a $\sim \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\sim (\mathcal{A} \to \sim \mathcal{B})$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$, respectivamente.

Ejercicio 4 De acuerdo a la composicionalidad, obtener la tabla de certeza de la fbc $((p \vee q) \to r)$.

Definición 4 Una *valuación* de L_0 es una función v cuyo dominio es el conjunto de las fbcs de L_0 y cuyo rango es el conjunto $\{V, F\}$, tal que para cualesquier fbcs $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de L_0:

1. $v(\mathcal{A}) \neq v(\sim \mathcal{A})$,
2. $v(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = F$ sii $v(\mathcal{A}) = V$ y $v(\mathcal{B}) = F$.

Definición 5 Una fbc $\mathcal{A}$ de L_0 es una *tautología* si para toda valuación v, $v(\mathcal{A}) = V$. Una fbc $\mathcal{A}$ de L_0 es una *contradicción* si para toda valuación v, $v(\mathcal{A}) = F$.

Ejercicio 5 Comprobar si las siguientes fbc son tautologías o contradicciones:

1. $(p \to p)$.
2. $(p \wedge (\sim p))$.
3. $(p \to (q \vee r))$.
4. $(p \to (q \to p))$.
5. $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$.
6. $(((\sim p) \to (\sim q)) \to (q \to p))$.

Definición 6 Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbc,

1. $\mathcal{A}$ *implica lógicamente* $\mathcal{B}$ si $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ es una tautología.
2. $\mathcal{A}$ es *lógicamente equivalente* a $\mathcal{B}$ si $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ es una tautología.

Ejercicio 6 Comprobar si las siguientes parejas son lógicamente equivalentes:

1. $(\sim p \vee q)$ y $(p \to p)$.
2. $(p \wedge q)$ y p.
3. $(p \to q)$ y $((\sim q) \to (\sim p))$.
4. $((p \vee q) \wedge r)$ y $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

5. $(((\sim p) \vee q) \to r)$ y $((p \wedge (\sim q)) \vee r)$.

Proposición 4 Si $\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ son tautologías, entonces $\mathcal{B}$ es una tautología.

Proposición 5 Sea $\mathcal{A}$ una fbc en la cual ocurren las variables proposicionales $p_1, p_2, \ldots, p_n$, y sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ cualesquier fbcs. Si $\mathcal{A}$ es una tautología, entonces la fbc $\mathcal{B}$, que se obtiene de reemplazar cada ocurrencia de p_i por $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ en $\mathcal{A}$, es también una tautología.

Ejercicio 7 Demuestre que $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{A})$ y $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{B})$ son tautologías.

Ejercicio 8 Demuestre que para cualesquier fbcs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, los siguientes pares son lógicamente equivalentes:

1. $(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))$ y $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C})$.
2. $(\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}))$ y $((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C})$.
3. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ y $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$.
4. $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ y $(\mathcal{B} \vee \mathcal{A})$.
5. $\mathcal{A}$ y $(\sim (\sim \mathcal{A}))$.

Lo anterior permite simplificar la escritura, por ejemplo: usar $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ en lugar de $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C})$, lo cual será justificado más adelante.

Proposición 6 Para cualesquier fbcs $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, la fbc $(\sim (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$ es lógicamente equivalente a $((\sim \mathcal{A}) \vee (\sim \mathcal{B}))$, y la fbc $(\sim (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}))$ es lógicamente equivalente a $((\sim \mathcal{A}) \wedge (\sim \mathcal{B}))$.

Proposición 7 Si $\mathcal{B}_1$ es la fbc que resulta por el reemplazamiento de las ocurrencias de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$ en la fbc $\mathcal{A}_1$, y $\mathcal{B}$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}_1$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{A}_1$.

Ejercicio 9 Demuestre que $((\sim ((\sim p) \vee q)) \vee r)$ es lógicamente equivalente a $((p \to q) \to r)$.

Definición 7 Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son formas proposicionales,

1. $\mathcal{A}$ *implica lógicamente* $\mathcal{B}$ si $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ es una tautología.
2. $\mathcal{A}$ es *lógicamente equivalente* a $\mathcal{B}$ si $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ es una tautología.

Ejercicio 10 Comprobar si las siguientes parejas son lógicamente equivalentes:

1. $(\sim p \vee q)$ y $(p \to p)$.
2. $(p \wedge q)$ y p.
3. $(p \to q)$ y $((\sim q) \to (\sim p))$.
4. $((p \vee q) \wedge r)$ y $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.
5. $(((\sim p) \vee q) \to r)$ y $((p \wedge (\sim q)) \vee r)$.

Proposición 8 Si $\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ son tautologías, entonces $\mathcal{B}$ es una tautología.

Proposición 9 Sea $\mathcal{A}$ una forma proposicional en la cual ocurren las variables proposicionales $p_1, p_2, \ldots, p_n$, y sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ cualesquier formas proposicionales. Si $\mathcal{A}$ es una tautología, entonces la forma proposicional $\mathcal{B}$, que se obtiene de reemplazar cada ocurrencia de p_i por $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ en $\mathcal{A}$, es también una tautología.

Ejercicio 11 Demuestre que $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{A})$ y $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{B})$ son tautologías.

Ejercicio 12 Demuestre que para cualesquier formas proposicionales $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, los siguientes pares son lógicamente equivalentes:

1. $(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))$ y $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C})$.
2. $(\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}))$ y $((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C})$.
3. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ y $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$.
4. $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ y $(\mathcal{B} \vee \mathcal{A})$.
5. $\mathcal{A}$ y $(\sim (\sim \mathcal{A}))$.

Lo anterior permite simplificar la escritura, por ejemplo: usar $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ en lugar de $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C})$, lo cual será justificado más adelante.

Proposición 10 Para cualesquier formas proposicionales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, la forma proposicional $(\sim (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$ es lógicamente equivalente a $((\sim \mathcal{A}) \vee (\sim \mathcal{B}))$, y la forma proposicional $(\sim (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}))$ es lógicamente equivalente a $((\sim \mathcal{A}) \wedge (\sim \mathcal{B}))$.

Proposición 11 Si $\mathcal{B}_1$ es la forma proposicional que resulta por el reemplazamiento de las ocurrencias de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$ en la forma proposicional $\mathcal{A}_1$, y $\mathcal{B}$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B}_1$ es lógicamente equivalente a $\mathcal{A}_1$.

Ejercicio 13 Demuestre que $((\sim ((\sim p) \vee q)) \vee r)$ es lógicamente equivalente a $((p \to q) \to r)$.

2.1 Formas normales

Definición 8 Una forma proposicional *restringida* es aquella en la que sólo se emplean los conectivos $\sim$, $\wedge$ y $\vee$.

Proposición 12 Sea $\mathcal{A}$ una forma proposicional restringida y $\mathcal{A}^*$ el resultado de intercambiar los conectivos $\wedge$ por $\vee$ y reemplazando cada variable proposicional por su negación en $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}^*$ es lógicamente equivalente a $(\sim \mathcal{A})$.

Corolario 2 Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son variables proposicionales, entonces $\bigvee_{i=1}^{n}(\sim p_i) = ((\sim p_1) \vee (\sim p_2) \vee \ldots \vee (\sim p_n))$ es lógicamente equivalente a $\sim (\bigwedge_{i=1}^{n} p_i) = (\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n))$.

Proposición 13 Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ cualesquier formas proposicionales. Entonces:

1. $\bigvee_{i=1}^{n}(\sim \mathcal{A}_i)$ es lógicamente equivalente a $\sim (\bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$.
2. $\bigwedge_{i=1}^{n}(\sim \mathcal{A}_i)$ es lógicamente equivalente a $\sim (\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)$.

Ejercicio 14 Demuestre que $((\sim (p \vee (\sim q))) \to (q \to r))$ es lógicamente equivalente a $((\sim (q \to p)) \to ((\sim q) \vee r))$.

Proposición 14 Toda función definida por una tabla de certeza está determinada por una forma proposicional restringida.

Ejercicio 15 Determine la forma proposicional restringida asociada a la función dada por la tabla:

V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Corolario 3 Toda forma proposicional que no es una contradicción es lógicamente equivalente a una forma proposicional restringida de la forma $(\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} P_{ij}))$, donde cada P_{ij} es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional. Dicha forma es llamada la *forma normal disyuntiva*.

Corolario 4 Toda forma proposicional que no es una tautología es lógicamente equivalente a una forma proposicional restringida de la forma $(\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n} P_{ij}))$, donde cada P_{ij} es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional. Dicha forma es llamada la *forma normal conjuntiva*.

Ejercicio 16 Encuentre las formas normales de cada una de las siguientes formas proposicionales:

1. $(p \leftrightarrow q)$.
2. $(((p \to q) \to r) \to s)$.

2.2 Argumentación y validez

Definición 9 La *forma argumentativa* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n;\ \therefore\ \mathcal{A}$ es *inválida* si es posible asignar valores de certeza a todas las variables proposicionales que ocurran, de tal forma que las formas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ tomen valor V y $\mathcal{A}$ tome valor F. En caso contrario la forma argumentativa es *válida*.

Ejercicio 17 Determine la validez o invalidez de las siguientes formas argumentativas:

1. $p \to q, q \to r, p;\ \therefore r$.
2. $p \to (q \to r), p;\ \therefore r$.

Observación 3 El procedimiento empleado para determinar la validez o invalidez de una forma argumentativa, a partir de la definición, puede ser simplificado buscando una asignación de valores a las variables para obtener en la "conclusión" un valor de certeza particular. Por ejemplo, si tenemos: $((\sim p_1) \vee p_2), (p_1 \to (p_3 \wedge p_4)), (p_4 \to p_2);\ \therefore (p_2 \vee p_3)$, tratamos de conseguir el valor F en $(p_2 \vee p_3)$: ambas variables tendrán que tomar el valor F. Además, para que sea inválida la forma argumentativa:

1. en $((\sim p_1) \vee p_2)$, p_1 deberá tomar el valor F,
2. a p_4 tendrá que asignarse F, para que $(p_4 \to p_2)$ sea V, y
3. con el asignamiento que llevamos $(p_1 \to (p_3 \wedge p_4))$, toma el valor V.

Tenemos, pues, un asignamiento de valores que hace tomar a toda la lista de "argumentos" el valor V y a la "conclusión" el valor F, así la forma argumentativa es inválida.

Proposición 15 La forma argumentativa $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n; \therefore \mathcal{A}$ es válida sii la forma proposicional $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$ es una tautología.

Ejercicio 18 Para cada argumentación, escriba la correspondiente forma argumentativa y determine si es inválida o válida:

1. Si la función f no es continua entonces la función g no es diferenciable, g es diferenciable. Por tanto, f es continua.
2. Si U es un subespacio de V entonces U es un subconjunto de V, U contiene el vector cero y U es cerrado. U es un subconjunto de V, y si U es cerrado entonces U contiene el vector cero. Por tanto, si U es cerrado entonces U es un subespacio de V.

Ejercicio 19 Suponga que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n; \therefore \mathcal{A}$ es una forma argumentativa válida. Demuestre que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}; \therefore (\mathcal{A}_n \to \mathcal{A})$ también lo es.

3 Propiedades de L.

Definición 10 Una *valuación* de L es una función v cuyo dominio es el conjunto de las fbcs de L y cuyo rango es el conjunto $\{V, F\}$, tal que para cualesquier fbcs $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de L:

1. $v(\mathcal{A}) \neq v(\sim \mathcal{A})$,
2. $v(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = F$ sii $v(\mathcal{A}) = V$ y $v(\mathcal{B}) = F$.

Definición 11 Una fbc $\mathcal{A}$ de L es una *tautología* si para toda valuación v, $v(\mathcal{A}) = V$.

Proposición 16 (Teorema de solidez) Todo teorema de L es una tautología.

Definición 12 Sea L' el sistema formal que se obtiene de modificar el conjunto de axiomas de L. L' es una *extensión* de L sii todos los teoremas de L continuan siendo teoremas de L'.

Ejercicio 20 Sea L' el sistema formal que se obtiene a partir de L reemplazando el esquema de axioma **L**3 por

L3' $((\sim \mathcal{A} \to \sim \mathcal{B}) \to ((\sim \mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A}))$.

Demuestre que:

1. Para cualesquier fórmulas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$:
   (a) $\vdash_{L} ((\sim \mathcal{A} \to \sim \mathcal{B}) \to ((\sim \mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{A}))$
   (b) $\vdash_{L'} ((\sim \mathcal{A} \to \sim \mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}))$
2. Toda fbc $\mathcal{A}$ es teorema de L sii $\mathcal{A}$ es un teorema de L'.

Ejercicio 21 Sea $\mathcal{A}$ una fbc de L, y L^+ la extensión de L que añade a sus axiomas $\mathcal{A}$. Pruebe que el conjunto de teoremas de L^+ es diferente del de L sii $\mathcal{A}$ no es un teorema de L.

Observación 4 Hay que resaltar que:

1. La relación de extensión se considera reflexiva.
2. Es posible tener una extensión de L sin axiomas en común.
3. Al construir extensiones de L puede suceder que encontremos situaciones indeseables como que $\mathcal{A}$ y $\sim \mathcal{A}$ sean teoremas de una extensión.

Definición 13 Una extensión de L es *consistente* si para ninguna fbc $\mathcal{A}$ se tiene que $\mathcal{A}$ y $\sim \mathcal{A}$ son teoremas de la extensión.

Ejercicio 22 Sea $\mathcal{A}$ la fbc $((\sim p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \sim p_2))$.

1. Pruebe que la extensión de L que incluye a $\mathcal{A}$ como nuevo axioma tiene un conjunto de teoremas mayor que el de L.
2. Diga si la extensión de L descrita anteriormente es consistente o no.

Proposición 17 L es consistente.

Proposición 18 Una extensión L^* de L es consistente sii hay una fbc que no es teorema de L^*.

Observación 5 La proposición anterior nos dice claramente que:

1. Si toda fbc es teorema de una extensión entonces dicha extensión es inconsistente.
2. Es suficiente mostrar una fbc que no sea teorema de una extensión para concluir que tal extensión es consistente.

Ejercicio 23 Demuestre que si $\mathcal{A}$ es una contradicción entonces $\mathcal{A}$ no puede ser teorema de ninguna extensión consistente de L.

Proposición 19 Sea L^* una extensión consistente de L y $\mathcal{A}$ una fbc que no es teorema de L^*. Entonces la extensión de L que se obtiene por aumentar a L^* el axioma $\sim \mathcal{A}$ es también consistente.

Definición 14 Una extensión L'' de L es *completa* si para toda fbc $\mathcal{A}$ se tiene $\vdash_{L''} \mathcal{A}$ o bien $\vdash_{L''} \sim \mathcal{A}$.

Observación 6 El término "completo" que califica las extensiones se ha empleado en cada contexto con diversos sentidos. Aquí lo hemos definido de una forma. Resulta importante notar que en nuestro contexto:

1. L difícilmente sería completo. Puesto que toda variable proposicional p es una fbc, y ni p ni $\sim p$ son teoremas.
2. Cualquier extensión inconsistente de L es completa.

Ejercicio 24 Pruebe que si L^c es una extensión consistente y completa de L, entonces cualquier extensión de L cuyos teoremas contengan propiamente a los teoremas de L^c es inconsistente.

Proposición 20 Sea L^* una extensión consistente de L, entonces existe una extensión consistente y completa de L^*.

Proposición 21 Si L^* es una extensión consistente de L, entonces existe una valuación v en la cual todo teorema de L^* toma el valor V.

Proposición 22 (Teorema de adecuación) Si una fbc $\mathcal{A}$ es una tautología, entonces $\underset{L}{\vdash} \mathcal{A}$.

Definición 15 Un sistema M es *decidible* si existe un procedimiento efectivo (algoritmo) para decidir si dada cualquier fbc es un teorema de M.

Proposición 23 L es decidible.