Sustitución en el Cálculo-λ Puro

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Fundamentos de Lenguajes de Programación CCOS 255

Contenido

Observación 1

- Intuitivamente la abstracción lambda $(\lambda x.M)$ nos permite definir una función sin nombre con parámetro formal x y cuerpo M.
- Intuitivamente la aplicación nos permite aplicar una función a su argumento.
- Uniendo estas intuiciones, si tenemos $(\lambda x.M)N$, necesitamos saber como **sustituir** el argumento N por el parámetro formal x en el cuerpo de la función M, lo cual denotaremos como $M[x := N]$.

Motivación I

- Sabemos, por nuestra experiencia programando, que no importa el nombre que usemos para los parámetros formales de un procedimiento, método o función de cualquier lenguaje de programación.

Motivación I

- Sabemos, por nuestra experiencia programando, que no importa el nombre que usemos para los parámetros formales de un procedimiento, método o función de cualquier lenguaje de programación.
- En matemáticas, $f(x) = x + y$ y $g(z) = z + y$ si bien no son sintácticamente iguales, sí son equivalentes porque calculan la misma función o tienen el mismo significado, ambas regresan la suma de su parámetro real y y.

Motivación I

- Sabemos, por nuestra experiencia programando, que no importa el nombre que usemos para los parámetros formales de un procedimiento, método o función de cualquier lenguaje de programación.
- En matemáticas, $f(x) = x + y$ y $g(z) = z + y$ si bien no son sintácticamente iguales, sí son equivalentes porque calculan la misma función o tienen el mismo significado, ambas regresan la suma de su parámetro real y y.
- Para evaluar una función sustituimos el parámetro real por el parámetro formal en el cuerpo de la función, así tenemos: $f(2) \mapsto 2 + y$ y $g(2) \mapsto 2 + y$. Por lo tanto, da lo mismo $x \mapsto x + y$ que $z \mapsto z + y$.

Motivación II

- Pero debemos tener cuidado, no podemos renombrar el parámetro formal por cualquier variable, si cambiamos el parámetro formal de nuestro ejemplo por y obtenemos $y \mapsto y + y = 2y$, es decir, cambiamos el significado de la función.

Motivación II

- Pero debemos tener cuidado, no podemos renombrar el parámetro formal por cualquier variable, si cambiamos el parámetro formal de nuestro ejemplo por y obtenemos $y \mapsto y + y = 2y$, es decir, cambiamos el significado de la función.
- Así, en el cuerpo de una función debemos distinguir entre las variables que son iguales al parámetro formal y aquellas que son distintas al parámetro formal, a las primeras les llamamos variables acotadas y a las segundas variable libres.

Motivación II

- Pero debemos tener cuidado, no podemos renombrar el parámetro formal por cualquier variable, si cambiamos el parámetro formal de nuestro ejemplo por y obtenemos $y \mapsto y + y = 2y$, es decir, cambiamos el significado de la función.
- Así, en el cuerpo de una función debemos distinguir entre las variables que son iguales al parámetro formal y aquellas que son distintas al parámetro formal, a las primeras les llamamos variables acotadas y a las segundas variable libres.
- Lo que cambió el significado en nuestro ejemplo es que la variable libre y en el cuerpo de $x \mapsto x + y$ fue capturada al cambiar el nombre del parámetro formal x por y para obtener $y \mapsto y + y = 2y$, pasó de ser libre a ser acotada.

Definición de variables acotadas y libres

Definición 2

Sea $(\lambda x.M)$ una abstracción-λ, cualquier aparición de la variable x en M se dice que está **acotada** y que el **ámbito** de λx es M, o que M está en el ámbito de λx. Si una variable no está acotada se dice que está **libre**.

Definición de conversión-α

Definición 3

Dos términos-λ M y N se dice que son equivalentes-α si sólo varían en el nombre de sus variables acotadas. Se le llama **conversión-α** al proceso de renombrar las variables acotadas.

Observación sobre conversión-α I

Observación 4

Note que lo que hace acotada a una variable x es que esté en el ámbito de una abstracción-λ, es decir, para realizar de manera correcta la conversión-α, debemos cambiar el nombre de la variable que aparece después de λ y todas sus ocurrencias en el cuerpo M de la abstracción-λ por una variable que no aparezca en el término-λ en cuestión.

Observación sobre conversión-α II

Observación 5

En términos de la representación árborea de un término-λ, debemos cambiar el nodo etiquetado λx, por ejemplo, por λz y los descendientes de dicho nodo que tengan etiqueta x la debemos cambiar por z.

Observaciones sobre variables acotadas

Observación 6

1. Recuerde que a $(\lambda x.M)$ le corresponde la siguiente representación árborea:

$$\begin{array}{c} \lambda x \\ | \\ M \end{array}$$

Observaciones sobre variables acotadas

Observación 6

1. Recuerde que a $(\lambda x.M)$ le corresponde la siguiente representación árborea:

$$\begin{array}{c} \lambda x \\ | \\ M \end{array}$$

2. Recuerde que en la representación árborea de un término-λ las hojas necesariamente se corresponden con variables.

Observaciones sobre variables acotadas

Observación 6

1. Recuerde que a $(\lambda x.M)$ le corresponde la siguiente representación árborea:

$$\begin{array}{c} \lambda x \\ | \\ M \end{array}$$

2. Recuerde que en la representación árborea de un término-λ las hojas necesariamente se corresponden con variables.
3. Por lo tanto, una variable x está acotada si al ascender desde ella hasta la raíz existe un nodo etiquetado λx.

Ejemplo variables acotadas I

Ejemplo 7

En el término-λ $(\lambda x.x)$, la aparición de x está acotada por λx.

Ejemplo 7

En el término-λ $(\lambda x.x)$, la aparición de x está acotada por λx.

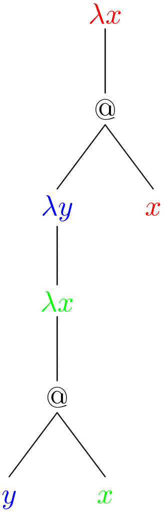
Note que en su representación árborea, en el camino de x hacía la raíz hay un nodo etiquetado λx.

Ejemplo variables acotadas II

En el término-λ $(\lambda x.(\lambda y.\lambda x.yx)x)$

Ejemplo variables acotadas II

En el término-λ $(\lambda x.(\lambda y.\lambda x.yx)x)$

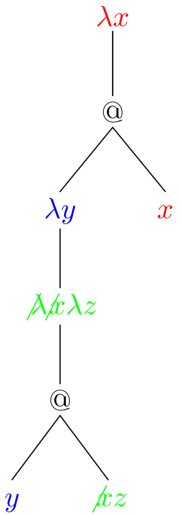


Ejemplo variables acotadas III

En el término-λ $(\lambda x.(\lambda y.\lambda x.yx)x) = (\lambda x.(\lambda y.\lambda z.yz)x)$

Ejemplo variables acotadas III

En el término-λ $(\lambda x.(\lambda y.\lambda x.yx)x) = (\lambda x.(\lambda y.\lambda z.yz)x)$

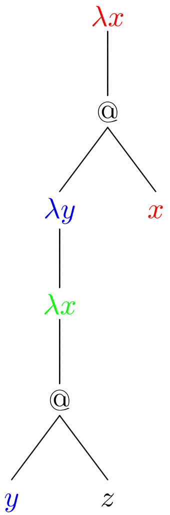


Ejemplo variables acotadas IV

En el término-λ $(\lambda x.(\lambda y.\lambda x.yz)x)$

Ejemplo variables acotadas IV

En el término-λ $(\lambda x.(\lambda y.\lambda x.yz)x)$



Definición 8

El conjunto de variables libres de un término-λ M,denotado por $FV(M)$, está definido inductivamente de la siguiente manera:

1. $FV(x) = \{x\}$,
2. $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$,
3. $FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$.

Definición de variables libres

Definición 8

El conjunto de variables libres de un término-λ M,denotado por $FV(M)$, está definido inductivamente de la siguiente manera:

1. $FV(x) = \{x\}$,
2. $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$,
3. $FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$.

Un término-λ es **cerrado** si su conjunto de variables libres es vacío.

Ejemplos variables libres y acotadas

- La variable x subrayada está acotada en $(\lambda x.\underline{x})$.
- Ambas ocurrencias subrayadas de la variable x están acotadas en $(\lambda x.\underline{xx})$.
- La variable x subrayada está acotada en $(\lambda x.\underline{x}y)$. La variable y subrayada está libre en $\lambda x.x\underline{y}$.
- La variable x subrayada está acotada en $x(\lambda x.\underline{x})$. La variable x subrayada está libre en $\underline{x}(\lambda x.x)$.
- La variable x subrayada está acotada en $(\lambda x.\underline{x})yx$. La variable x subrayada está libre en $(\lambda x.x)y\underline{x}$.

Motivación para sustitución

- Recuerde que iniciamos diciendo que para poder evaluar $(\lambda x.M)N$ necesitabamos saber como sustituir el argumento N por el parámetro formal x en el cuerpo de la función M, lo cual denotamos mediante $M[x := N]$.
- Note que en $M[x := N]$, x es el parámetro formal en $(\lambda x.M)$, pero que M ya no está en el ámbito de λx, por lo tanto todas las apariciones de x en M son libres.

Definición 9

La sustitución de N por x en M, denotada por $M[x := N]$ se define por inducción sobre la definición de términos-λ como sigue:

1. $x[x := N] = N$,

Definición 9

La sustitución de N por x en M, denotada por $M[x := N]$ se define por inducción sobre la definición de términos-λ como sigue:

1. $x[x := N] = N$,
2. $y[x := N] = y$ para $y \neq x$,

Definición de sustitución

Definición 9

La sustitución de N por x en M, denotada por $M[x := N]$ se define por inducción sobre la definición de términos-λ como sigue:

1. $x[x := N] = N$,
2. $y[x := N] = y$ para $y \neq x$,
3. $(PQ)[x := N] = (P[x := N]Q[x := N])$,

Definición 9

La sustitución de N por x en M, denotada por $M[x := N]$ se define por inducción sobre la definición de términos-λ como sigue:

1. $x[x := N] = N$,
2. $y[x := N] = y$ para $y \neq x$,
3. $(PQ)[x := N] = (P[x := N]Q[x := N])$,
4. $(\lambda x.P)[x := N] = (\lambda x.P)$,

Definición 9

La sustitución de N por x en M, denotada por $M[x := N]$ se define por inducción sobre la definición de términos-λ como sigue:

1. $x[x := N] = N$,
2. $y[x := N] = y$ para $y \neq x$,
3. $(PQ)[x := N] = (P[x := N]Q[x := N])$,
4. $(\lambda x.P)[x := N] = (\lambda x.P)$,
5. $(\lambda y.P)[x := N] = (\lambda y.(P[x := N]))$ si $x \neq y$ y $y \notin FV(N)$,

Definición 9

La sustitución de N por x en M, denotada por $M[x := N]$ se define por inducción sobre la definición de términos-λ como sigue:

1. $x[x := N] = N$,
2. $y[x := N] = y$ para $y \neq x$,
3. $(PQ)[x := N] = (P[x := N]Q[x := N])$,
4. $(\lambda x.P)[x := N] = (\lambda x.P)$,
5. $(\lambda y.P)[x := N] = (\lambda y.(P[x := N]))$ si $x \neq y$ y $y \notin FV(N)$,
6. $(\lambda y.P)[x := N] = (\lambda z.(P[y := z][x := N]))$ si $x \neq y, z \notin FV(N) \cup FV(P)$ y $y \in FV(N)$.

Definición de sustitución en palabras

1. Sólo puedo sustituir un término-λ N por una variable x si la variable x está libre.

Definición de sustitución en palabras

2. No puedo sustituir un término-λ N por una variable x si lo que tengo es una variable y, aunque ésta esté libre.

Definición de sustitución en palabras

3. Para sustituir un término-λ N por una variable x en una aplicación, hago la sustitución en ambos miembros de la aplicación.

4. No puedo sustituir un término-λ N por una variable x si la variable x es el parámetro formal de la abstracción-λ, dado que todas las apariciones de la variable x en el cuerpo P están acotadas.

5. Puedo sustituir un término-λ N por una variable x si la variable y es el parámetro formal de la abstracción-λ y si N no tiene ocurrencias libres de la variable y, porque esas ocurrencias se volverían acotadas después de la sustitución en P.

Definición de sustitución en palabras

6. En caso de que N tenga ocurrencias libres de la variable y, puedo cambiar y por una nueva variable z tanto en la abstracción como en el cuerpo P y luego aplicarle al resultado la sustitución de N por x.

Ejemplos de sustituciones correctas

Ejemplo 10

- Correctas:
  - $(\lambda y.xy)[x := y] = (\lambda z.yz)$,
  - $(\lambda y.xy)[x := y] = (\lambda u.yu)$,
  - $(x(\lambda y.xy))[x := y] = y(\lambda z.yz)$,
  - $(\lambda y.xy)[x := z] = (\lambda y.zy)$.
- Incorrectas:
  - $(\lambda y.xy)[x := y] = (\lambda y.yy)$,
  - $(x(\lambda y.xy))[x := y] = y(\lambda y.yy)$.

Un ejemplo paso a paso

$$(\overbrace{x}^{P}\overbrace{(\lambda y.xy)}^{Q})[x := \overbrace{y}^{N}] \stackrel{3}{=}$$

$$(x[x := \overbrace{y}^{N}])((\lambda y.xy)[x := y]) \stackrel{1}{=}$$

$$y((\lambda y.\overbrace{xy}^{P})[x := \overbrace{y}^{N}]) \stackrel{6}{=}$$

$$y(\lambda z.(xy[y := z][x := y])) \stackrel{3}{=}$$

$$y(\lambda z.((x[y := z])(y[y := z]))[x := y])) \stackrel{2}{=}$$

$$y(\lambda z.(x(y[y := z]))[x := y]) \stackrel{1}{=}$$

$$y(\lambda z.(xz)[x := y]) \stackrel{3}{=}$$

$$y(\lambda z.(x[x := y]z[x := y])) \stackrel{1}{=}$$

$$y(\lambda z.(yz[x := y])) \stackrel{2}{=}$$

$$y(\lambda z.yz)$$

Ejercicios I

1. Defina en ML la función `subs = fn : t * vars * t -> t`, sus parámetros se corresponden a los elementos de una sustitución $M[x := N]$, es decir el primer argumento de `subs` es M, el segundo es x y el tercero es N.
2. A los siete casos de prueba que les pondré en la página deben de hacer su traducción a términos-λ y deben hacer a mano las sustituciones, con ello ganarán experiencia en el manejo de los términos-λ, en su codificación en ML y sabrán si las respuestas de su función son correctas o incorrectas.

Ejercicios II

Ejemplo 11

`subs(l(x 2, a(v(x 1), v(x 2))), x 1, v(x 2));` corresponde a

$$(\lambda x_2.x_1x_2)[x_1 := x_2] \overset{6}{=}$$

$$(\lambda x_3.(x_1x_2)[x_2 := x_3][x_1 := x_2]) \overset{3}{=}$$

$$(\lambda x_3.(x_1[x_2 := x_3]x_2[x_2 := x_3])[x_1 := x_2]) \overset{2}{=}$$

$$(\lambda x_3.(x_1x_2[x_2 := x_3])[x_1 := x_2]) \overset{1}{=}$$

$$(\lambda x_3.(x_1x_3)[x_1 := x_2]) \overset{3}{=}$$

$$(\lambda x_3.(x_1[x_1 := x_2]x_3[x_1 := x_2])) \overset{1}{=}$$

$$(\lambda x_3.(x_2x_3[x_1 := x_2])) \overset{2}{=}$$

$$(\lambda x_3.(x_2x_3)) = (\lambda x_3.x_2x_3)$$

que corresponde a `val it = l(x 3, a(v(x 2), v(x 3))) :  t`

Consideraciones para implementar `subs` I

1. Noten que la definición de substitución tiene 6 casos, 2 para variables, 1 para aplicación y 3 para abstracción-λ y sólo tenemos definidos tres constructores, así que tendrán que resolver los dos casos de variables y los tres de abstracción-λ en el cuerpo de la función, porque no pueden hacer "pattern matching" para el mismo constructor más de una vez.

2. Deben implementar la función `subs` tal y como está en la definición de substitución. Hay diferentes maneras de definir la substitución para el cálculo-λ pero la que les presento es la que se implementa más fácilmente.

Consideraciones para implementar `subs` II

1. Para poder implementar los casos 5 y 6, como indica la definición necesitan calcular las variables libres de un término-λ para ello usen listas y la definición de variables libres. También necesitarán la función que elimina un elemento de una lista y que verifica si un elemento pertenece a una lista.

Consideraciones para implementar `subs` II

2. Para el caso 6, la forma más fácil de saber cuál es la variable "nueva" z, es aprovechando que nuestras variables están numeradas, así se aseguran de no atrapar una variable libre encontrando el número de variable mayor que hay en las variables libres de $N \cup P$, la variable nueva será igual al número mayor encontrado más uno.