Estrategias de Reducción

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Fundamentos de Lenguajes de Programación CCOS 255

Contenido

Motivación

Observación 1

El término-λ $(\lambda x.xx)((\lambda y.y)z)$ se puede reducir a $(\lambda x.xx)z$, pero también se puede reducir a $((\lambda y.y)z)((\lambda y.y)z)$.

Motivación

Observación 1

El término-λ $(\lambda x.xx)((\lambda y.y)z)$ se puede reducir a $(\lambda x.xx)z$, pero también se puede reducir a $((\lambda y.y)z)((\lambda y.y)z)$. Así reducción-$\beta$ **no es determinista**.

Reducción-β

Definición 2

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]}\ \textsc{Beta} \qquad \frac{N \to_\beta N'}{MN \to_\beta MN'}\ \textsc{Mu}$$

$$\frac{M \to_\beta M'}{MN \to_\beta M'N}\ \textsc{Nu} \qquad \frac{M \to_\beta M'}{(\lambda x.M) \to_\beta (\lambda x.M')}\ \textsc{Xi}$$

Reducción-β

Definición 2

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]}\ \textsc{Beta} \qquad \frac{N \to_\beta N'}{MN \to_\beta MN'}\ \textsc{Mu}$$

$$\frac{M \to_\beta M'}{MN \to_\beta M'N}\ \textsc{Nu} \qquad \frac{M \to_\beta M'}{(\lambda x.M) \to_\beta (\lambda x.M')}\ \textsc{Xi}$$

Observación 3

Reducción-β no es determinista porque tenemos tres reglas para reducir una aplicación: Beta, Nu y Mu.

Reducción-β

Definición 2

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]}\ \textsc{Beta} \qquad \frac{N \to_\beta N'}{MN \to_\beta MN'}\ \textsc{Mu}$$

$$\frac{M \to_\beta M'}{MN \to_\beta M'N}\ \textsc{Nu} \qquad \frac{M \to_\beta M'}{(\lambda x.M) \to_\beta (\lambda x.M')}\ \textsc{Xi}$$

Observación 3

Reducción-β no es determinista porque tenemos tres reglas para reducir una aplicación: $\textsc{Beta}$, $\textsc{Nu}$ y $\textsc{Mu}$.

Observación 4

Las reglas $\textsc{Beta}$, $\textsc{Nu}$ y $\textsc{Mu}$ se pueden ordenar en seis maneras distintas $(3!)$.

Estrategia de reducción

Definición 5

En el cálculo-λ puro, una estrategia de reducción está determinada por el orden en que se aplican las reglas $\textsc{Beta}$, $\textsc{Nu}$ y $\textsc{Mu}$.

En la práctica, de las seis sólo se usan tres.

Reducción de orden normal (RON)

También llamada reducción **más izquierda y más externa**.

Definición 6

Use primero $\textsc{Beta}$, luego $\textsc{Nu}$ y al final $\textsc{Mu}$.

1. $$\frac{}{(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]}\ \textsc{Beta}$$
2. $$\frac{M \to_\beta M'}{MN \to_\beta M'N}\ \textsc{Nu}$$
3. $$\frac{N \to_\beta N'}{MN \to_\beta MN'}\ \textsc{Mu}$$

También llamada reducción **más izquierda y más interna**.

Definición 7

Use primero $\textsc{Nu}$, luego $\textsc{Mu}$ y al final $\textsc{Beta}$.

1. $$\frac{M \to_\beta M'}{MN \to_\beta M'N}\ \textsc{Nu}$$
2. $$\frac{N \to_\beta N'}{MN \to_\beta MN'}\ \textsc{Mu}$$
3. $$\frac{}{(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]}\ \textsc{Beta}$$

Reducción de orden aplicativo de derecha a izquierda (ROADI)

También llamada reducción **más derecha y más interna**.

Definición 8

Use primero Mu, luego Nu y al final Beta.

1. $$\frac{N \to_\beta N'}{MN \to_\beta MN'} \ \textsc{Mu}$$
2. $$\frac{M \to_\beta M'}{MN \to_\beta M'N} \ \textsc{Nu}$$
3. $$\frac{}{(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]} \ \textsc{Beta}$$

Observaciones sobre las estrategias

Observación 9

- Más externa significa que BETA se usa primero.

Observación 9

- Más externa significa que Beta se usa primero.
- Más interna significa que Beta se usa al final.

Observaciones sobre las estrategias

Observación 9

- Más externa significa que $\textsc{Beta}$ se usa primero.
- Más interna significa que $\textsc{Beta}$ se usa al final.
- Tomando como referencia la aplicación MN, más izquierda significa que se reduce primero M y luego N.

Observaciones sobre las estrategias

Observación 9

- Más externa significa que $\textsc{Beta}$ se usa primero.
- Más interna significa que $\textsc{Beta}$ se usa al final.
- Tomando como referencia la aplicación MN, más izquierda significa que se reduce primero M y luego N.
- Tomando como referencia la aplicación MN, más derecha significa que se reduce primero N y luego M.

Las diferentes estrategias de reducción siempre llegarán a la misma forma normal, pero existen otras diferencias que debemos considerar.

Observación 10

Considere la aplicación $(\lambda x.M)N$ bajo los escenarios siguientes:

- La complejidad para reducir N es alta.
- La reducción de N no termina.
- x no está libre en M.
- x aparece libre en M muchas veces.

¿Cuál es la mejor estrategia? I

$$(\lambda x.M)N$$

- Si x no está libre en M, gana la reducción de orden normal. En particular, si la reducción de N no termina, las reducciones de orden aplicativo no terminan, pero la aplicación de orden normal sí termina.

¿Cuál es la mejor estrategia? I

$$(\lambda x.M)N$$

- Si x está libre muchas veces en M, probablemente gane la reducción de orden aplicativo, ya que la reducción de orden normal haría copias múltiples de N, las cuales se tendrán que reducir. En la reducción de orden normal, cada copia debe reducirse separadamente a su forma normal. Pero en las reducciones de orden aplicativo, N se reduce a su forma normal antes de sustituirse por x.

¿Cuál es la mejor estrategia? II

- Lo único que puede evitar que encontremos una forma normal es una secuencia infinita de reducciones.

¿Cuál es la mejor estrategia? II

- La reducción de orden normal retrasa toda reducción posible hasta que no le queda otra opción, por ello se puede evitar una secuencia infinita de reducciones.

¿Cuál es la mejor estrategia? II

- Se le llama reducción de orden normal porque si una forma normal existe, se garantiza que la reducción de orden normal la encuentra.

¿Cuál es la mejor estrategia? II

- Pero como no sabemos de antemano que término-λ tenemos que reducir, no se puede decir cuál es la mejor estrategia.

Ejemplo 11

ROADI $(\lambda x_1.(\lambda x_2.x_1))\mathsf{I}\Omega \rightarrow_{\beta}^{\mathrm{MU}} (\lambda x_1.(\lambda x_2.x_1))\mathsf{I}\Omega \rightarrow_{\beta}^{\mathrm{MU}} \cdots$

Ejemplos de estrategias de reducción I

Ejemplo 11

$$\text{ROAID}\quad (\lambda x_1.(\lambda x_2.x_1))\mathsf{I}\Omega \to_\beta^{\text{NU}} (\lambda x_2.\mathsf{I})\Omega \to_\beta^{\text{MU}} (\lambda x_2.\mathsf{I})\Omega \to_\beta^{\text{MU}} \cdots$$

Ejemplos de estrategias de reducción I

Ejemplo 11

RON $(\lambda x_1.(\lambda x_2.x_1))\mathsf{I}\Omega \to_{\beta}^{\textsc{Beta}} (\lambda x_2.\mathsf{I})\Omega \to_{\beta}^{\textsc{Beta}} \mathsf{I}$

Ejemplos de estrategias de reducción I

ROADI $(\lambda x_1.(\lambda x_2.x_1))\mathsf{I}\Omega \rightarrow_\beta^{\text{MU}} (\lambda x_1.(\lambda x_2.x_1))\mathsf{I}\Omega \rightarrow_\beta^{\text{MU}} \cdots$

ROAID $(\lambda x_1.(\lambda x_2.x_1))\mathsf{I}\Omega \rightarrow_\beta^{\text{NU}} (\lambda x_2.\mathsf{I})\Omega \rightarrow_\beta^{\text{MU}} (\lambda x_2.\mathsf{I})\Omega \rightarrow_\beta^{\text{MU}} \cdots$

RON $(\lambda x_1.(\lambda x_2.x_1))\mathsf{I}\Omega \rightarrow_\beta^{\text{BETA}} (\lambda x_2.\mathsf{I})\Omega \rightarrow_\beta^{\text{BETA}} \mathsf{I}$

Ejemplos de estrategias de reducción II

Ejemplo 12

ROADI $(\lambda x_1.x_2x_1x_1)((\lambda x_3.x_3)x_4) \rightarrow_\beta^{\textsc{Mu}} (\lambda x_1.x_2x_1x_1)x_4 \rightarrow_\beta^{\textsc{Beta}} x_2x_4x_4$

Ejemplos de estrategias de reducción II

Ejemplo 12

ROAID $(\lambda x_1.x_2x_1x_1)((\lambda x_3.x_3)x_4) \to_\beta^{\textsc{Mu}} (\lambda x_1.x_2x_1x_1)x_4 \to_\beta^{\textsc{Beta}} x_2x_4x_4$

Ejemplo 12

RON $(\lambda x_1.x_2x_1x_1)((\lambda x_3.x_3)x_4) \rightarrow_{\beta}^{\text{BETA}}$
$x_2((\lambda x_3.x_3)x_4)((\lambda x_3.x_3)x_4) \rightarrow_{\beta}^{\text{NU}} x_2x_4((\lambda x_3.x_3)x_4) \rightarrow_{\beta}^{\text{MU}}$
$x_2x_4x_4$

Ejemplos de estrategias de reducción II

ROADI $(\lambda x_1.x_2x_1x_1)((\lambda x_3.x_3)x_4) \rightarrow_\beta^{\text{Mu}} (\lambda x_1.x_2x_1x_1)x_4 \rightarrow_\beta^{\text{Beta}} x_2x_4x_4$

ROAID $(\lambda x_1.x_2x_1x_1)((\lambda x_3.x_3)x_4) \rightarrow_\beta^{\text{Mu}} (\lambda x_1.x_2x_1x_1)x_4 \rightarrow_\beta^{\text{Beta}} x_2x_4x_4$

RON $(\lambda x_1.x_2x_1x_1)((\lambda x_3.x_3)x_4) \rightarrow_\beta^{\text{Beta}} x_2((\lambda x_3.x_3)x_4)((\lambda x_3.x_3)x_4) \rightarrow_\beta^{\text{Nu}} x_2x_4((\lambda x_3.x_3)x_4) \rightarrow_\beta^{\text{Mu}} x_2x_4x_4$

Ejercicios

1. Implemente las funciones:

   ```
   > val ron = fn : t -> t
   > val roaid = fn : t -> t
   > val roadi = fn : t -> t
   ```

2. Implemente sus respectivas cerraduras reflexivas y transitivas (`ronaster`, `roaidaster` y `roadiaster`) para que pueda tener estrategias de reducción de muchos pasos.
3. Pruebe sus implementaciones con los casos de prueba que están en el archivo `http://aleteya.cs.buap.mx/~jlavalle/flp/betabetasterCasosPrueba.txt` y también con los términos-λ de los ejemplos 11 y 12.