Teoría Axiomática de Conjuntos
FCC BUAP

José de Jesús Lavalle Martínez

Primavera de 2007

Índice

1. Construcción de clases

Para empezar aclaremos que una noción "indefinida"no tiene propiedades, excepto aquellas que se le asignen explícitamente; por lo tanto, debemos enunciar como *axiomas* todas las propiedades elementales que esperamos que tengan las nociones indefinidas.

En nuestro sistema de teoría axiomática de conjuntos elegimos dos nociones indefinidas: la palabra *clase* y la *relación de pertenencia* $\in$. Todos los objetos de nuestra teoría se llaman clases. Ciertas clases, que se llamarán *conjuntos*, serán definidas posteriormente. Todo conjunto es una clase, pero no recíprocamente; una clase que no es un conjunto se llama *clase propia*.

Comentemos brevemente sobre el "significado" que le intentamos dar a dichas nociones. En la interpretación pretendida de nuestro sistema axiomático, la palabra *clase* se entiende que refiere a cualquier colección de objetos. No obstante, ciertas colecciones "excesivamente grandes"pueden formarse en teoría ingenua de conjuntos (por ejemplo, la colección de todos los x tales que $x \notin x$), las cuales conllevan a contradicciones tales como la paradoja de Russell. El término *clase propia* se entiende que refiere a estas colecciones "excesivamente grandes"; todas las demás colecciones son *conjuntos*.

Si x y A son clases, la espresión $x \in A$ se lee como "x es un elemento de A", o "x pertenece a A", o "x está en A". Es conveniente escribir $x \notin A$ por "x no es un elemento de A". Sea x una clase; si existe una clase A tal que $x \in A$, entonces a x se le llama un *elemento*.

De aquí en adelante usaremos las siguientes convenciones notacionales: las **letras minúsculas** $a, b, c, x, y, \ldots$ **sólo serán usadas para designar elementos**. Así, una letra mayúscula, tal como A, puede denotar tanto a un elemento como a una clase que no es un elemento, pero una letra minúscula, tal como x, sólo puede denotar a un elemento.

Definición 1 Sean A y B clases; definimos $A = B$ para significar que todo elemento de A es un elemento de B y viceversa. En símbolos,

$$A = B \text{ ssi } x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Hemos definido que dos clases son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. Las clases que son iguales tienen otra propiedad: si x y y son clases iguales y x es un elemento de A, ciertamente esperaremos que y sea un elemento de A. Esta propiedad se enuncia como nuestro primer axioma:

Axioma 1 Si $x = y$ y $x \in A$, entonces $y \in A$.

A este axioma se le llama *axioma de extensión.*

Definición 2 Sean A y B clases; definimos $A \subseteq B$ para significar que todo elemento de A es un elemento de B. En símbolos:

$$A \subseteq B \text{ ssi } x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Si $A \subseteq B$, entonces decimos que A es una *subclase* de B.

Definimos que $A \subset B$ para significar que $A \subseteq B$ y $A \neq B$; en este caso, decimos que A es una *subclase estricta* de B.

Si A es una subclase de B, y A es un conjunto, le llamaremos a A un *subconjunto* de B.

Unas propiedades simples de la igualdad y la inclusión se dan en el siguiente teorema.

Teorema 1 Para todas las clases A, B y C, lo siguiente se cumple:

1. $A = A$.
2. $A = B \Rightarrow B = A$.
3. $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$.
4. $A \subseteq B$ y $B \subseteq A \Rightarrow A = B$.
5. $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Prueba:

1. La proposición $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \in A$ es obviamente verdadera; así, por la Definición 1, $A = A$.

2. Suponga que $A = B$; entonces $x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$; por la conmutatividad de la conjunción tenemos que $x \in B \Rightarrow x \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \in B$; así, por la Definición 1, $B = A$.

3. Suponga que $A = B$ y $B = C$; entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in B, \\ x \in B &\Rightarrow x \in A, \\ x \in B &\Rightarrow x \in C, \\ x \in C &\Rightarrow x \in B. \end{aligned}$$

   De la primera y la tercera concluimos (dado que $(((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$ es una tautología) que $x \in A \Rightarrow x \in C$. De la segunda y la cuarta, por la conmutatividad de la conjunción y la tautología anterior, concluimos que $x \in C \Rightarrow x \in A$. Así, por la Definición 1, $A = C$.

4. Ejercicio para el lector.

5. Ejercicio para el lector.

De manera intuitiva sabemos que construimos clases enunciando una propiedad de objetos y formando la clase de los objetos que tengan dicha propiedad. Nuestro segundo axioma nos permite hacer clases de esta manera.

Axioma 2 Sea $P(x)$ una propiedad sobre x que puede expresarse enteramente en términos de los símbolos $\in, \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \exists, \forall$, las variables $x, y, z, A, B, C, \ldots$ y paréntesis. Entonces existe una clase C que consiste de todos los elementos x que satisfacen la propiedad $P(x)$.

El Axioma 2 se llama *axioma de construcción de clase.*

Debemos notar que el Axioma 2 nos permite formar la clase de todos los *elementos* x que satisfacen $P(x)$, pero *no* la clase de todas las *clases* x que satisfacen $P(x)$; esta definición es suficiente para eliminar las paradojas lógicas. Las paradojas semánticas se han evitado al admitir, en el Axioma 2, sólo las propiedades $P(x)$ que se puedan escribir completamente en términos de los símbolos $\in, \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \exists, \forall$, paréntesis y variables.

La clase C cuya existencia se da por cierta mediante el Axioma 2 se designa simbólicamente como:

$$C = \{x|P(x)\}.$$

Note que el uso de la x minúscula no es accidental en la expresión $\{x|P(x)\}$, sino que es muy esencial. Recordemos que hemos acordado que las letras minúsculas $x, y, \ldots$ se usarán para designar elementos. Así

$$C = \{x|P(x)\}.$$

asevera que C es la clase de todos los *elementos* x que satisfacen $P(x)$.

Ahora usaremos el axioma de construcción de clase para formar nuevas clases a partir de clases dadas.

Definición 3 Sean A y B clases; la *unión* de A y B se define como la clase de todos los elementos que pertenecen a A, o a B, o a ambas A y B. En símbolos,

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Así, $x \in A \cup B$ si y sólo si $x \in A \vee x \in B$.

Definición 4 Sean A y B clases; la *intersección* de A y B se define como la clase de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B. En símbolos,

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

Así, $x \in A \cap B$ si y sólo si $x \in A \wedge x \in B$.

Definición 5 Por la *clase universal* $\mathcal{U}$ queremos significar la clase de todos los elementos. La existencia de la clase universal es una consecuencia del axioma de construcción de clase, ya que si tomamos a $P(x)$ como la propiedad $x = x$, entonces el Axioma 2 garantiza la existencia de una clase que consiste de todos los elementos que satisfacen $x = x$; por el Teorema 1(1), todos los elementos están en esta clase.

Definición 6 Por la clase *vacía* $\varnothing$ queremos significar la clase que no tiene elementos. La existencia de la clase vacía es una consecuencia del axioma de construcción de clase; ya que el Axioma 2 garantiza la existencia de una clase que consiste de todos los elementos que satisfacen $x \neq x$; por el Teorema 1(1), esta clase no tiene elementos.

Teorema 2 Para toda clase A lo siguiente se cumple:

1. $\varnothing \subseteq A$.
2. $A \subseteq \mathcal{U}$.

Prueba:

1. Que $\varnothing \subseteq A$ significa que $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$, lo cual siempre es cierto, ya que $x \in \varnothing$ es falso (la clase vacía no tiene elementos) y falso implica cualquier cosa es siempre verdadero.
2. Si $x \in A$, entonces x es un elemento; así $x \in \mathcal{U}$.

Definición 7 Si dos clases no tienen elementos en común se dice que son *disjuntas*. En símbolos,

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntas ssi } A \cap B = \varnothing.$$

Definición 8 El *complemento* de una clase A es la clase de todos los elementos que no pertenecen a A. En símbolos,

$$A' = \{x | x \notin A\}.$$

Así, $x \in A'$ si y sólo si $x \notin A$.

Ejercicio 1 Practique con los siguientes problemas.

1. Suponga que $A \subseteq B$ y que $C \subseteq D$; pruebe que
   a) $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$.
   b) $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$.
2. Suponga que $A = B$ y que $C = D$; pruebe que
   a) $(A \cup C) = (B \cup D)$.
   b) $(A \cap C) = (B \cap D)$.
3. Pruebe que si $A \subseteq B$, entonces $B' \subseteq A'$.
4. Pruebe que si $A = B$, entonces $A' = B'$.
5. Pruebe que si $A = B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
6. Pruebe que si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

2. Álgebra de clases

Uno de los aspectos más interesantes y útiles sobre clases es que, bajo las operaciones de unión, intersección y complemento, satisfacen ciertas leyes algebráicas a partir de las cuales podemos desarrollar un álgebra de clases.

En esta sección desarrollaremos las leyes básicas del álgebra de clases. Recordemos que la palabra *clase* debe entenderse como *cualquier colección de objetos*; así, debemos entender que las leyes que aquí se presentan se aplican a toda colección de objetos; en particular, se aplican a conjuntos.

Teorema 3 Si A y B son cualesquiera clases, entonces

1. $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.
2. $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

Prueba:

1. Para probar que $A \subseteq A \cup B$ debemos probar que $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$:

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in B \text{ recuerde que } (P \Rightarrow (P \vee Q)) \\ &\qquad \text{es una tautología} \\ &\Rightarrow \quad x \in A \cup B \text{ por la Definición 3.} \end{aligned}$$

   Análogamente se puede demostrar que $B \subseteq A \cup B$.

2. Para probar que $A \cap B \subseteq A$ debemos probar que $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$:

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \text{ por la Definición 4} \\ &\Rightarrow x \in A \text{ recuerde que } ((P \wedge Q) \Rightarrow P) \text{ es una tautología.} \end{aligned}$$

   Análogamente se puede demostrar que $A \cap B \subseteq B$.

Teorema 4 Si A y B son clases entonces

1. $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.
2. $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

Prueba:

1. Asumamos primero que $A \subseteq B$; esto es, $x \in A \Rightarrow x \in B$. Entonces

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \text{ por la Definición 3} \\ &\Rightarrow x \in B \vee x \in B \text{ ya que si } Q \Rightarrow R \text{ entonces} \\ & ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R)) \text{ es una tautología} \\ &\Rightarrow x \in B \text{ ya que } ((P \vee P) \Leftrightarrow P) \text{ es una tautología.} \end{aligned}$$

   Así, $A \cup B \subseteq B$, pero por el Teorema 3(1) $B \subseteq A \cup B$, consecuentemente $A \cup B = B$.

   Reciprocamente, asumamos que $A \cup B = B$. Nuevamente por el Teorema 3(1) $A \subseteq A \cup B$, así $A \subseteq B$.

2. Ejercicio para el lector.

Teorema 5 (*Leyes de Absorción*). Para todas las clases A y B,

1. $A \cup (A \cap B) = A$.
2. $A \cap (A \cup B) = A$.

Prueba:

1. Por el Teorema 3(2) $A \cap B \subseteq A$ y por el Teorema 4(1) $A \cup (A \cap B) = A$.
2. Por el Teorema 3(1) $A \subseteq A \cup B$ y por el Teorema 4(2) $A \cap (A \cup B) = A$.

Teorema 6 Para toda clase A, $(A')' = A$.

Prueba:

$$x \in (A')' \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in A \text{ por la Definición 8,}$$
$$x \in A \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in (A')' \text{ por la Definición 8.}$$

Teorema 7 (*Leyes de De Morgan*). Para todas las clases A y B,

1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Prueba:

1. Primero,

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin (A \cup B) \text{ por la Definición 8} \\ &\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \quad (\text{si } x \in A \vee x \in B, \\ &\quad \text{entonces } x \in A \cup B) \\ &\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \text{ por la Definición 8} \\ &\Rightarrow x \in (A' \cap B') \text{ por la Definición 4.} \end{aligned}$$

   Luego,

$$\begin{aligned} x \in (A' \cap B') &\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \text{ por la Definición 4} \\ &\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \text{ por la Definición 8} \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B)' \text{ por la Definición 8.} \end{aligned}$$

2. Ejercicio para el lector.

Teorema 8 Para todas las clases A, B y C las siguientes se cumplen:

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $A \cup A = A$.
4. $A \cap A = A$.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Prueba:

1.

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \text{ por la Definición 3} \\ &\Rightarrow x \in B \vee x \in A \text{ por la conmutatividad de la disyunción} \\ &\Rightarrow x \in B \cup A \text{ por la Definición 3.} \end{aligned}$$

2. Ejercicio para el lector.
3. Ejercicio para el lector.
4. Ejercicio para el lector.
5.

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \text{ por la Definición 3}\\
&\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \text{ por la Definición 3}\\
&\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \text{ por la asociatividad}\\
&\ \text{de la disyunción}\\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \text{ por la Definición 3}\\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C \text{ por la Definición 3.}
\end{aligned}$$

6. Ejercicio para el lector.
7.

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \text{ por la Definición 4}\\
&\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \text{ por la Definición 3}\\
&\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \text{ por la}\\
&\ \text{distribución de la conjunción sobre la disyunción}\\
&\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \text{ por la Definición 4}\\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ por la Definición 3.}
\end{aligned}$$

8. Ejercicio para el lector.

Teorema 9 Para toda clase A,

1. $A \cup \varnothing = A$.
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
3. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
4. $A \cap \mathcal{U} = A$.
5. $\mathcal{U}' = \varnothing$.
6. $\varnothing' = \mathcal{U}$.
7. $A \cup A' = \mathcal{U}$.
8. $A \cap A' = \varnothing$.

Prueba:

1. Por el Teorema 2.(1) $\varnothing \subseteq A$ y en consecuencia al Teorema 4.(1) $A \cup \varnothing = A$.

2. Ejercicio para el lector.

3. Por el Teorema 2.(2) $A \subseteq \mathcal{U}$ y en consecuencia al Teorema 4.(1) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

4. Ejercicio para el lector.

5. Ejercicio para el lector.

6. Ejercicio para el lector.

7. Ejercicio para el lector.

8. Ejercicio para el lector.

Las leyes del álgebra de clases que hemos desarrollado nos permiten probar todas las propiedades elementales de clases sin referirnos a las definiciones de los símbolos $\cup, \cap, '$ y $\subseteq$. El siguiente es un ejemplo de como se procede.

Ejemplo 1 Pruebe que $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$.

Prueba:

$$\begin{aligned} A \cap (A' \cup B) &= (A \cap A') \cup (A \cap B) \text{ por el Teorema 8.(7)} \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \text{ por el Teorema 9.(8)} \\ &= A \cap B \text{ por el Teorema 9.(1).} \end{aligned}$$

La siguiente definición frecuentemente es útil: La *diferencia* de dos clases A y B es la clase de todos los elementos que pertenecen a A pero que no pertenecen a B. En símbolos,

$$A - B = A \cap B'.$$

Ejemplo 2 Pruebe que $A - B = B' - A'$.

Prueba:

$$\begin{aligned} A - B &= A \cap B' \text{ por Definición de diferencia} \\ &= B' \cap A \text{ por el Teorema 8.(2)} \\ &= B' \cap (A')' \text{ por el Teorema 6} \\ &= B' - A' \text{ por la definición de diferencia.} \end{aligned}$$

Es útil notar que las propiedades que involucran inclusión ($\subseteq$), en lugar de igualdad, se pueden probar usando álgebra de clases ayudándose con el Teorema 4.

Ejercicio 2 Use álgebra de clases para demostrar lo siguiente:

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

2. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3. Si $A \cap C = \varnothing$ entonces $A \cap (B \cup C) = A \cap B$.
4. Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $A - B = A$.
5. Si $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = C$ entonces $A = C - B$.
6. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.
7. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
8. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
9. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Ejercicio 3 Definimos la operación $+$ sobre clases como sigue: Si A y B son clases entonces:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A).$$

Pruebe lo siguiente:

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.
4. $A + A = \varnothing$.
5. $A + \varnothing = A$

Ejercicio 4 Pruebe lo siguiente:

1. Si $A \cup B = \varnothing$ entonces $A = \varnothing$ y $B = \varnothing$.
2. $A \cap B' = \varnothing$ si y sólo si $A \subseteq B$.
3. $A + B = \varnothing$ si y sólo si $A = B$.
4. $A \cup C = B \cup C$ si y sólo si $A + B \subseteq C$.
5. $(A \cup C) + (B \cup C) = (A + B) - C$.

Ejercicio 5 Use álgebra de clases para probar que si $A \subseteq B$ y $C = B - A$ entonces $A = B - C$.

3. Pares ordenados y productos cartesianos

Si a es un elemento podemos usar el axioma de construcción de clase para formar la clase
$$\{a\} = \{x|x = a\}.$$
Es fácil ver que $\{a\}$ contiene sólo un elemento, llamado elemento a. A una clase que contiene un solo elemento se le llama *solitaria*.

Si a y b son elementos podemos usar el axioma de construcción de clase para formar la clase
$$\{a, b\} = \{x|x = a \vee x = b\}.$$
Claramente $\{a, b\}$ contiene dos elementos, llamados los elementos a y b. Una clase que contiene exactamente dos elementos es llamada *par desordenado*, o simplemente una *pareja*.

De manera análoga podemos formar las clases $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$ y así sucesivamente.

En matemáticas frecuentemente necesitamos formar las clases cuyos elementos son parejas. Para poder hacer esto legítimamente, necesitamos un nuevo axioma que garantice que si a y b son elementos entonces la pareja $\{a, b\}$ es un elemento. Esto motiva nuestro siguiente axioma, al que se le suele llamar *Axioma de apareamiento*:

Axioma 3 Si a y b son elementos entonces $\{a, b\}$ es un elemento.

Está claro que $\{a, a\} = \{a\}$; así, al definir $a = b$ en el Axioma 3, inmediatamente obtenemos que si a es un elemento entonces la solitaria $\{a\}$ es un elemento.

Teorema 10 Si $\{x, y\} = \{u, v\}$ entonces
$$\text{o } [x = u \wedge y = v] \text{ o } [x = v \wedge y = u].$$

Prueba: Ejercicio para el lector. (Sugerencia: Considere separadamente los casos $x = y$ y $x \neq y$. Luego use el Axioma 1.)

Una noción importante en matemáticas es la de un *par ordenado* de elementos. Intuitivamente, un para ordenado es una clase que consiste de dos elementos en un orden específico. En efecto, el orden realmente no es esencial; lo que es esencial es que los pares ordenados tienen la siguiente propiedad.

Propiedad 1 Sean (a, b) y (c, d) pares ordenados. Si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$.

Nos gustaría definir pares ordenados de tal manera que no sea necesario introducir una nueva noción indefinida de “orden”. Es un hecho interesante que, realmente, se puede lograr procediendo como sigue.

Definición 9 Sean a y b elementos; el *par ordenado* (a, b) se define como la clase

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Por el Axioma 3, (a, b) se puede formar legítimamente y *también es un elemento.*

Vale la pena notar que

$$(b, a) = \{\{b\}, \{b, a\}\} = \{\{b\}, \{a, b\}\}.$$

Así hay una clara distinción entre los dos posibles "ordenes"(a, b) y (b, a) ya que son dos clases distintas, resta probar que los pares ordenados, como han sido definidos, tienen la Propiedad 1.

Teorema 11 Si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$.

Prueba: Suponga que $(a, b) = (c, d)$; esto es,

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Por el Teorema 10, o

$$[\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}]$$

o

$$[\{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c\}];$$

consideraremos separadamente los dos casos.

Caso 1 $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$. De $\{a\} = \{c\}$ se sigue que $a = c$. De $\{a, b\} = \{c, d\}$ y el Teorema 10 se sigue que o $a = c$ y $b = d$, o $a = d$ y $b = c$; en el primer subcaso hemos terminado; en el segundo subcaso como $a = c$ tenemos entonces que $b = c = a = d$, con lo que terminamos el **Caso 1**.

Caso 2 $\{a\} = \{c, d\}$ y $\{a, b\} = \{c\}$. Aquí, $c \in \{c, d\}$ y $\{c, d\} = \{a\}$, así $c \in \{a\}$; por lo que $c = a$; análogamente, $d = a$. También, $b \in \{a, b\}$ y $\{a, b\} = \{c\}$, así $b \in \{c\}$; por lo que $b = c$. De tal manera que $a = b = c = d$, terminando la prueba.

Definición 10 El *producto cartesiano* de dos clases A y B es la clase de los pares ordenados (x, y) donde $x \in A$ y $y \in B$. En símbolos,

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}.$$

Las siguientes son propiedades simples del producto cartesiano.

Teorema 12 Para todas las clases A, B, C y D,

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

3. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Prueba:

1.

$$\begin{aligned}(x,y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C\\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in A \times C\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C).\end{aligned}$$

2. Ejercicio para el lector.

3.

$$\begin{aligned}(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in C \times D\\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in C \wedge y \in D\\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D).\end{aligned}$$

Ejercicio 6 Pruebe que:

1. $A \times (B - D) = (A \times B) - (A \times D)$.
2. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$.
3. $(A \times A) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.
4. $(A \times B) - (C \times C) = [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$.
5. $(A \times A) - (B \times C) = [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - C)]$.
6. A y B son disjuntas si y sólo si para cualquier clase no vacía C, $A \times C$ y $B \times C$ son disjuntas.
7. Si A y C son clases no vacías, $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ si y sólo si $A \times C \subseteq B \times D$.
8. Sean A, B, C y D clases no vacías. $A \times B = C \times D$ si y sólo si $A = C$ y $B = D$.
9. $A \times B$ y $A' \times C$ son disjuntas.
10. $B \times A$ y $C \times A'$ son disjuntas.
11. $A \times B = \varnothing$ si y sólo si $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$.
12. Si $a = \{b\}$ entonces $b \in a$.
13. $x = y$ si y sólo si $\{x\} = \{y\}$.

14. $x \in a$ si y sólo si $\{x\} \subseteq a$.

15. $\{a, b\} = \{a\}$ si y sólo si $a = b$.

16. La siguiente es una definición alternativa de par ordenado:

$$(x, y) = \{\{x, \varnothing\}, \{y, \{\varnothing\}\}\}.$$

Use esta definición para probar que si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$.

4. Gráficas

Una clase de pares ordenados se llama una *gráfica*. Dicho de otra manera, una gráfica es una subclase arbitraria de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Definición 11 Si G es una gráfica entonces G^{-1} es la gráfica definida mediante

$$G^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in G\}.$$

Definición 12 Si G y H son gráficas entonces $G \circ H$ es la gráfica definida como sigue

$$G \circ H = \{(x, y) | \exists z \ni (x, z) \in H \wedge (z, y) \in G\}.$$

Las siguientes son propiedades básicas de gráficas.

Teorema 13 Si G, H y J son gráficas entonces las siguientes propiedades se cumplen:

1. $G \circ (H \circ J) = (G \circ H) \circ J$.
2. $(G^{-1})^{-1} = G$.
3. $(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$.

Prueba:

1.

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (G \circ H) \circ J \quad & \Leftrightarrow \quad \exists z \ni (x, z) \in J \wedge (z, y) \in G \circ H \\
& \Leftrightarrow \quad \exists w \wedge \exists z \ni (x, z) \in J \wedge (z, w) \in H \wedge (w, y) \in G \\
& \Leftrightarrow \quad \exists w \ni (x, w) \in H \circ J \wedge (w, y) \in G \\
& \Leftrightarrow \quad (x, y) \in G \circ (H \circ J)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (G^{-1})^{-1} \quad & \Leftrightarrow \quad (y, x) \in G^{-1} \\
& \Leftrightarrow \quad (x, y) \in G
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (G \circ H)^{-1} &\Leftrightarrow (y,x) \in G \circ H \\
&\Leftrightarrow \exists z \ni (y,z) \in H \wedge (z,x) \in G \\
&\Leftrightarrow \exists z \ni (x,z) \in G^{-1} \wedge (z,y) \in H^{-1} \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in H^{-1} \circ G^{-1}
\end{aligned}$$

5. Funciones

5.1. Conceptos y definiciones fundamentales

Definición 13 Una *función de A a B* es un triple de objetos $< f, A, B >$, donde A y B son clases y f es una subclase de $A \times B$ con las siguientes propiedades:

F1 $\forall x \in A, \exists y \in B$ tal que $(x,y) \in f$.

F2 Si $(x,y_1) \in f$ y $(x,y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$.

Se acostumbra escribir $f : A \to B$ en lugar de $< f, A, B >$.

Sea $f : A \to B$ una función; si $(x,y) \in f$ decimos que *y es la imagen de x* (con respecto a f); también decimos que *x es la preimagen de y* (con respecto a f); también se dice que *f mapea x sobre y* y lo simbolizamos mediante $x \overset{f}{\mapsto} y$.

Así, **F1** enuncia que **todo elemento** $x \in A$ **tiene una imagen** $y \in B$. **F2** enuncia que si $x \in A$ entonces **la imagen de** x **es única**. Se sigue que **F1** y **F2** combinadas enuncian que **todo elemento** $x \in A$ **tiene una imagen únicamente determinada** $y \in B$.

Teorema 14 Sean A y B clases y sea f una gráfica. Entonces $f : A \to B$ es una función si y sólo si:

1. **F2** se cumple,
2. $dom\ f = A$ y
3. $ran\ f \subseteq B$.

Corolario 1 Sea $f : A \to B$ una función; si C es cualquier clase tal que $ran\ f \subseteq C$ entonces $f : A \to C$ es una función.

Sea $f : A \to B$ una función y sea $x \in A$; se acostumbra usar el símbolo $f(x)$ para designar la imagen de x. Así, $y = f(x)$ **tiene el mismo significado que** $(x,y) \in f$. Usando esta convención, las condiciones **F1** y **F2** toman la forma:

F1 $\forall x \in A, \exists y \in B, y = f(x)$.

F2 Si $y_1 = f(x)$ y $y_2 = f(x)$ entonces $y_1 = y_2$.

Teorema 15 Sean $f : A \to B$ y $g : A \to B$ funciones. Entonces $f = g$ si y sólo si $f(x) = g(x), \forall x \in A$.

Definición 14 Una función $f : A \to B$ se dice que es *inyectiva* si tiene la siguiente propiedad: **INJ** Si $(x_1, y) \in f$ y $(x_2, y) \in f$ entonces $x_1 = x_2$.

Note que **INJ** simplemente enuncia que si y es cualquier elemento de B entonces y **no tiene más de una preimagen**. Usando nuestra notación para imágenes podemos escribir **INJ** como: si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

Definición 15 Una función $f : A \to B$ se dice que es *sobreyectiva* si tiene la siguiente propiedad: **SURJ** $\forall y \in B, \exists x \in A \ni y = f(x)$.

La condición **SURJ** enuncia que *todo* elemento de B es la imagen de algún elemento de A, esto es, $B \subseteq ran\ f$, pero por el Teorema 14-3 $ran\ f \subseteq B$, así $f : A \to B$ **es sobreyectiva si y sólo si** $ran\ f = B$.

Definición 16 Una función $f : A \to B$ se dice que es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Definición 17 Si existe una función biyectiva $f : A \to B$ entonces decimos que A y B *están en correspondencia uno a uno.*

Teorema 16 Si $f : B \cup C \to A$ es una función entonces $f = f_{[B]} \cup f_{[C]}$.

Teorema 17 Sean $f_1 : B \to A$ y $f_2 : C \to A$ funciones donde $B \cap C = \emptyset$. Si $f = f_1 \cup f_2$ entonces lo siguiente se cumple:

1. $f : B \cup C \to A$ es una función.
2. $f_1 = f_{[B]}$ y $f_2 = f_{[C]}$.
3. Si $x \in B$ entonces $f(x) = f_1(x)$ y si $x \in C$ entonces $f(x) = f_2(x)$.

Ejercicio 7 Resuelva los siguientes problemas:

1. Pruebe que las funciones identidad, constante, inclusión, característica y la restricción de una función califican como funciones de acuerdo a la definicón de función, en otras palabras que cumplen **F1** y **F2**.
2. Si $f : A \to B$ es un función inyectiva y $C \subseteq A$ entonces $f_{[C]} : C \to B$ es un función inyectiva.
3. Sea A una clase y sea $f = \{(x, (x, x)) | x \in A\}$. Muestre que f es una función biyectiva de A en I_A.
4. Sean $f : A \to B$ y $g : A \to B$ funciones. Pruebe que si $f \subseteq g$ entonces $f = g$.

5. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones. El *producto* de f y g es la función definida como sigue:

$$[f \cdot g](x, y) = (f(x), g(y)) \text{ para todo } (x, y) \in A \times C.$$

Pruebe que $f \cdot g$ es una función de $A \times C$ en $B \times D$. Pruebe que si f y g son inyectivas entonces $f \cdot g$ es inyectiva y que si f y g son sobreyectivas entonces $f \cdot g$ es sobreyectiva. Pruebe que $ran\ [f \cdot g] = (ran\ f) \times (ran\ g)$.

5.2. Propiedades de funciones compuestas y funciones inversas

Teorema 18 Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones entonces $g \circ f : A \to C$ es una función.

Por la Definición 12, $(x, y) \in g \circ f$ si y sólo si para algún elemento z, $(x, z) \in f$ y $(z, y) \in g$. Así, $x \overset{g\circ f}{\mapsto} y$ si y sólo si para algún z, $x \overset{f}{\mapsto} z$ y $z \overset{g}{\mapsto} y$. Esto es lo mismo como decir que $y = [g \circ f](x)$ si y sólo si para algún z, $z = f(x)$ y $y = g(z)$. Por lo cual obtenemos lo siguiente: $[g \circ f](x) = g(f(x))$.

Definición 18 Una función $f : A \to B$ se dice que es *invertible* si $f^{-1} : B \to A$ es una función.

Sea $f : A \to B$ una función invertible; por la Definición 11, $(x, y) \in f$ si y sólo si $(y, x) \in f^{-1}$. Así, $x \overset{f}{\mapsto} y$ si y sólo si $y \overset{f^{-1}}{\mapsto} x$. De donde obtenemos $y = f(x)$ si y sólo si $x = f^{-1}(y)$.

Teorema 19 Si $f : A \to B$ es una función biyectiva entonces $f^{-1} : B \to A$ es una función biyectiva.

Teorema 20 Si $f : A \to B$ es invertible entonces $f : A \to B$ es biyectiva.

Teorema 21 Sea $f : A \to B$ una función invertible entonces:

1. $f^{-1} \circ f = I_A$ y
2. $f \circ f^{-1} = I_B$.

Teorema 22 Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Si $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$ entonces $f : A \to B$ es biyectiva (y por tanto invertible) y $g = f^{-1}$.

Teorema 23 Sea $f : A \to B$ una función; $f : A \to B$ es inyectiva si y sólo si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$.

Teorema 24 Sea $f : A \to B$ una función; $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si existe una función $g : B \to A$ tal que $f \circ g = I_B$.

Teorema 25 Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $g \circ f : A \to C$ son funciones entonces lo siguiente se cumple:

1. Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.
2. Si f y g son sobreyectivas entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
3. Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Ejercicio 8 Resuelva los siguientes problemas:

1. Sea $f : A \to B$ una función. Pruebe que $I_B \circ f = f$ y que $f \circ I_A = f$.
2. Suponga que $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones. Pruebe que si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva; pruebe que si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva. Concluya que si $g \circ f$ es biyectiva entoces f es inyectiva y g es sobreyectiva.
3. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Suponga que $y = f(x)$ si y sólo si $x = g(y)$. Pruebe que f es invertible y que $g = f^{-1}$.
4. Sean $g : B \to C$ y $h : B \to C$ funciones. Suponga que $g \circ f = h \circ f$ para toda función $f : A \to B$. Pruebe que $g = h$.
5. Suponga que $g : A \to B$ y $h : A \to B$ son funciones. Sea C un conjunto con más de un elemento; suponga que $f \circ g = f \circ h$ para toda función $f : B \to C$. Pruebe que $g = h$.
6. Sea $f : B \to C$ una función. Pruebe que f es inyectiva si y sólo si para todo par de funciones $g : A \to B$ y $h : A \to B$, $(f \circ g = f \circ h) \Rightarrow g = h$.
7. Sea $f : A \to B$ una función. Pruebe que f es sobreyectiva si y sólo si para todo par de funciones $g : B \to C$ y $h : B \to C$, $(g \circ f = h \circ f) \Rightarrow g = h$.