Teoría Axiomática de Conjuntos
FCC BUAP

José de Jesús Lavalle Martínez

Otoño de 2012

Índice general

Resumen

Este documento es una traducción de partes de los capítulos 1, 2 y 3 del libro *Set Theory* de Charles C. Pinter.

Capítulo 1

Clases y conjuntos

1.1. Construcción de clases

Para empezar aclaremos que una noción "indefinida" no tiene propiedades, excepto aquellas que se le asignen explícitamente; por lo tanto, debemos enunciar como *axiomas* todas las propiedades elementales que esperamos que tengan las nociones indefinidas.

En nuestro sistema de teoría axiomática de conjuntos elegimos dos nociones indefinidas: la palabra *clase* y la *relación de pertenencia* $\in$. Todos los objetos de nuestra teoría se llaman clases. Ciertas clases, que se llamarán *conjuntos*, serán definidas posteriormente. Todo conjunto es una clase, pero no recíprocamente; una clase que no es un conjunto se llama *clase propia*.

Comentemos brevemente sobre el "significado" que le intentamos dar a dichas nociones. En la interpretación pretendida de nuestro sistema axiomático, la palabra *clase* se entiende que refiere a cualquier colección de objetos. No obstante, ciertas colecciones "excesivamente grandes" pueden formarse en teoría ingenua de conjuntos (por ejemplo, la colección de todos los x tales que $x \notin x$), las cuales conllevan a contradicciones tales como la paradoja de Russell. El término *clase propia* se entiende que refiere a estas colecciones "excesivamente grandes"; todas las demás colecciones son *conjuntos*.

Si x y A son clases, la espresión $x \in A$ se lee como "x es un elemento de A", o "x pertenece a A", o "x está en A". Es conveniente escribir $x \notin A$ por "x no es un elemento de A". Sea x una clase; si existe una clase A tal que $x \in A$, entonces a x se le llama un *elemento*.

De aquí en adelante usaremos las siguientes convenciones notacionales:

las **letras minúsculas** $a, b, c, x, y, \ldots$ **sólo serán usadas para designar elementos**. Así, una letra mayúscula, tal como A, puede denotar tanto a un elemento como a una clase que no es un elemento, pero una letra minúscula, tal como x, sólo puede denotar a un elemento.

Definición 1.1.1 Sean A y B clases; definimos $A = B$ para significar que todo elemento de A es un elemento de B y viceversa. En símbolos,

$$A = B \text{ ssi } x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Hemos definido que dos clases son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. Las clases que son iguales tienen otra propiedad: si x y y son clases iguales y x es un elemento de A, ciertamente esperaremos que y sea un elemento de A. Esta propiedad se enuncia como nuestro primer axioma:

Axioma 1 Si $x = y$ y $x \in A$, entonces $y \in A$.

A este axioma se le llama *axioma de extensión*.

Definición 1.1.2 Sean A y B clases; definimos $A \subseteq B$ para significar que todo elemento de A es un elemento de B. En símbolos:

$$A \subseteq B \text{ ssi } x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Si $A \subseteq B$, entonces decimos que A es una *subclase* de B.

Definimos que $A \subset B$ para significar que $A \subseteq B$ y $A \neq B$; en este caso, decimos que A es una *subclase estricta* de B.

Si A es una subclase de B y A es un conjunto, le llamaremos a A un *subconjunto* de B.

Unas propiedades simples de la igualdad y la inclusión se dan en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1 Para todas las clases A, B y C, lo siguiente se cumple: 1. $A = A$. 2. $A = B \Rightarrow B = A$. 3. $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$. 4. $A \subseteq B$ y $B \subseteq A \Rightarrow A = B$. 5. $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Prueba:

1. La proposición $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \in A$ es obviamente verdadera; así, por la Definición 1.1.1, $A = A$.

2. Suponga que $A = B$; entonces $x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A$; por la conmutatividad de la conjunción tenemos que $x \in B \Rightarrow x \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \in B$; así, por la Definición 1.1.1, $B = A$.

3. Suponga que $A = B$ y $B = C$; entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{gathered} x \in A \Rightarrow x \in B, \\ x \in B \Rightarrow x \in A, \\ x \in B \Rightarrow x \in C, \\ x \in C \Rightarrow x \in B. \end{gathered}$$

   De la primera y la tercera concluimos (dado que $(((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$ es una tautología) que $x \in A \Rightarrow x \in C$. De la segunda y la cuarta, por la conmutatividad de la conjunción y la tautología anterior, concluimos que $x \in C \Rightarrow x \in A$. Así, por la Definición 1.1.1, $A = C$.

4. Ejercicio para el lector.

5. Ejercicio para el lector. □

De manera intuitiva sabemos que construimos clases enunciando una propiedad de objetos y formando la clase de los objetos que tengan dicha propiedad. Nuestro segundo axioma nos permite hacer clases de esta manera.

Axioma 2 Sea $P(x)$ una propiedad sobre x que puede expresarse enteramente en términos de los símbolos $\in, \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \exists, \forall$, las variables $x, y, z, A, B, C, \ldots$ y paréntesis. Entonces existe una clase C que consiste de todos los elementos x que satisfacen la propiedad $P(x)$.

El Axioma 2 se llama *axioma de construcción de clase*.

Debemos notar que el Axioma 2 nos permite formar la clase de todos los *elementos* x que satisfacen $P(x)$, pero *no* la clase de todas las *clases* x que satisfacen $P(x)$; esta definición es suficiente para eliminar las paradojas lógicas. Las paradojas semánticas se han evitado al admitir, en el Axioma 2, sólo las propiedades $P(x)$ que se puedan escribir completamente en términos de los símbolos $\in, \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \exists, \forall$, paréntesis y variables.

La clase C cuya existencia se da por cierta mediante el Axioma 2 se designa simbólicamente como:

$$C = \{x | P(x)\}.$$

Note que el uso de la x minúscula no es accidental en la expresión $\{x|P(x)\}$, sino que es muy esencial. Recordemos que hemos acordado que las letras minúsculas $x, y, \ldots$ se usarán para designar elementos. Así

$$C = \{x|P(x)\}.$$

asevera que C es la clase de todos los *elementos* x que satisfacen $P(x)$.

Ahora usaremos el axioma de construcción de clase para formar nuevas clases a partir de clases dadas.

Definición 1.1.3 Sean A y B clases; la *unión* de A y B se define como la clase de todos los elementos que pertenecen a A, o a B, o a ambas A y B. En símbolos,

$$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}.$$

Así, $x \in A \cup B$ si y sólo si $x \in A \vee x \in B$.

Definición 1.1.4 Sean A y B clases; la *intersección* de A y B se define como la clase de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B. En símbolos,

$$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}.$$

Así, $x \in A \cap B$ si y sólo si $x \in A \wedge x \in B$.

Definición 1.1.5 Por la *clase universal* U nos referimos a la clase de todos los elementos. La existencia de la clase universal es una consecuencia del axioma de construcción de clase, ya que si tomamos a $P(x)$ como la propiedad $x = x$, entonces el Axioma 2 garantiza la existencia de una clase que consiste de todos los elementos que satisfacen $x = x$; por el Teorema 1.1.1(1), todos los elementos están en esta clase.

Definición 1.1.6 Por la clase *vacía* $\varnothing$ nos referimos a la clase que no tiene elementos. La existencia de la clase vacía es una consecuencia del axioma de construcción de clase; ya que el Axioma 2 garantiza la existencia de una clase que consiste de todos los elementos que satisfacen $x \neq x$; por el Teorema 1.1.1(1), esta clase no tiene elementos.

Teorema 1.1.2 Para toda clase A lo siguiente se cumple: 1. $\varnothing \subseteq A$. 2. $A \subseteq U$.

Prueba:

1. Que $\varnothing \subseteq A$ significa que $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$, lo cual siempre es cierto, ya que $x \in \varnothing$ es falso (la clase vacía no tiene elementos) y falso implica cualquier cosa es siempre verdadero.

2. Si $x \in A$, entonces x es un elemento; así $x \in U$. $\square$

Definición 1.1.7 Si dos clases no tienen elementos en común se dice que son *disjuntas*. En símbolos,

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntas ssi } A \cap B = \varnothing.$$

Definición 1.1.8 El *complemento* de una clase A es la clase de todos los elementos que no pertenecen a A. En símbolos,

$$A' = \{x | x \notin A\}.$$

Así, $x \in A'$ si y sólo si $x \notin A$.

Ejercicio 1.1.1 Practique con los siguientes problemas.

1. Suponga que $A \subseteq B$ y que $C \subseteq D$; pruebe que

   a) $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$.
   b) $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$.

2. Suponga que $A = B$ y que $C = D$; pruebe que

   a) $(A \cup C) = (B \cup D)$.
   b) $(A \cap C) = (B \cap D)$.

3. Pruebe que si $A \subseteq B$, entonces $B' \subseteq A'$.

4. Pruebe que si $A = B$, entonces $A' = B'$.

5. Pruebe que si $A = B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

6. Pruebe que si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

1.2. Álgebra de clases

Uno de los aspectos más interesantes y útiles sobre clases es que, bajo las operaciones de unión, intersección y complemento, satisfacen ciertas leyes algebráicas a partir de las cuales podemos desarrollar un álgebra de clases.

En esta sección desarrollaremos las leyes básicas del álgebra de clases. Recordemos que la palabra *clase* debe entenderse como *cualquier colección de objetos*; así, debemos entender que las leyes que aquí se presentan se aplican a toda colección de objetos; en particular, se aplican a conjuntos.

Teorema 1.2.1 Si A y B son cualesquiera clases, entonces

1. $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.
2. $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

Prueba:

1. Para probar que $A \subseteq A \cup B$ debemos probar que $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$:

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in B \text{ recuerde que } (P \Rightarrow (P \vee Q)) \\ &\qquad \text{es una tautología} \\ &\Rightarrow \quad x \in A \cup B \text{ por la Definición 1.1.3.} \end{aligned}$$

   Análogamente se puede demostrar que $B \subseteq A \cup B$.

2. Para probar que $A \cap B \subseteq A$ debemos probar que $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$:

$$\begin{aligned} x \in A \cap B \quad &\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \in B \text{ por la Definición 1.1.4} \\ &\Rightarrow \quad x \in A \text{ recuerde que } ((P \wedge Q) \Rightarrow P) \text{ es una tautología.} \end{aligned}$$

   Análogamente se puede demostrar que $A \cap B \subseteq B$. □

Teorema 1.2.2 Si A y B son clases entonces

1. $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cup B = B$.
2. $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

Prueba:

1. Asumamos primero que $A \subseteq B$; esto es, $x \in A \Rightarrow x \in B$. Entonces

$$\begin{aligned} x \in A \cup B \quad &\Rightarrow \quad x \in A \vee x \in B \text{ por la Definición 1.1.3} \\ &\Rightarrow \quad x \in B \vee x \in B \text{ ya que si } Q \Rightarrow R \text{ entonces} \\ &\qquad ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R)) \text{ es una tautología} \\ &\Rightarrow \quad x \in B \text{ ya que } ((P \vee P) \Leftrightarrow P) \text{ es una tautología.} \end{aligned}$$

   Así, $A \cup B \subseteq B$, pero por el Teorema 1.2.1(1) $B \subseteq A \cup B$, consecuentemente $A \cup B = B$.

   Reciprocamente, asumamos que $A \cup B = B$. Nuevamente por el Teorema 1.2.1(1) $A \subseteq A \cup B$, así $A \subseteq B$.

2. Ejercicio para el lector. $\square$

Teorema 1.2.3 (*Leyes de Absorción*). Para todas las clases A y B,

1. $A \cup (A \cap B) = A$.

2. $A \cap (A \cup B) = A$.

Prueba:

1. Por el Teorema 1.2.1(2) $A \cap B \subseteq A$ y por el Teorema 1.2.2(1) $A \cup (A \cap B) = A$.

2. Por el Teorema 1.2.1(1) $A \subseteq A \cup B$ y por el Teorema 1.2.2(2) $A \cap (A \cup B) = A$. $\square$

Teorema 1.2.4 Para toda clase A, $(A')' = A$.

Prueba:

$$x \in (A')' \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in A \text{ por la Definición 1.1.8,}$$
$$x \in A \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in (A')' \text{ por la Definición 1.1.8.}$$

$\square$

Teorema 1.2.5 (*Leyes de De Morgan*). Para todas las clases A y B,

1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Prueba:

1. Primero,

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin (A \cup B) \text{ por la Definición 1.1.8} \\
&\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \quad (\text{si } x \in A \vee x \in B, \\
&\quad \text{entonces } x \in A \cup B) \\
&\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \text{ por la Definición 1.1.8} \\
&\Rightarrow x \in (A' \cap B') \text{ por la Definición 1.1.4.}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
x \in (A' \cap B') &\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \text{ por la Definición 1.1.4} \\
&\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \text{ por la Definición 1.1.8} \\
&\Rightarrow x \notin A \cup B \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B)' \text{ por la Definición 1.1.8.}
\end{aligned}$$

2. Ejercicio para el lector. □

Teorema 1.2.6 Para todas las clases A, B y C las siguientes se cumplen: 1. $A \cup B = B \cup A$. 2. $A \cap B = B \cap A$. 3. $A \cup A = A$. 4. $A \cap A = A$. 5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. 6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. 7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. 8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Prueba:

1.

$$\begin{aligned}
x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \text{ por la Definición 1.1.3} \\
&\Rightarrow x \in B \vee x \in A \text{ por la conmutatividad de la disyunción} \\
&\Rightarrow x \in B \cup A \text{ por la Definición 1.1.3.}
\end{aligned}$$

2. Ejercicio para el lector.

3. Ejercicio para el lector.

4. Ejercicio para el lector.

5.

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \text{ por la Definición 1.1.3} \\
&\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \text{ por la Definición 1.1.3} \\
&\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \text{ por la asociatividad} \\
&\quad\ \text{de la disyunción} \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \text{ por la Definición 1.1.3} \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C \text{ por la Definición 1.1.3.}
\end{aligned}
$$

6. Ejercicio para el lector.

7.

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \text{ por la Definición 1.1.4} \\
&\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \text{ por la Definición 1.1.3} \\
&\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \text{ por la} \\
&\quad\ \text{distribución de la conjunción sobre la disyunción} \\
&\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \text{ por la Definición 1.1.4} \\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ por la Definición 1.1.3.}
\end{aligned}
$$

8. Ejercicio para el lector. $\square$

Teorema 1.2.7 Para toda clase A, 1. $A \cup \varnothing = A$. 2. $A \cap \varnothing = \varnothing$. 3. $A \cup U = U$. 4. $A \cap U = A$. 5. $U' = \varnothing$. 6. $\varnothing' = U$. 7. $A \cup A' = U$. 8. $A \cap A' = \varnothing$.

Prueba:

1. Por el Teorema 1.1.2.(1) $\varnothing \subseteq A$ y en consecuencia al Teorema 1.2.2.(1) $A \cup \varnothing = A$.

2. Ejercicio para el lector.

3. Por el Teorema 1.1.2.(2) $A \subseteq U$ y en consecuencia al Teorema 1.2.2.(1) $A \cup U = U$.

4. Ejercicio para el lector.

5. Ejercicio para el lector.

6. Ejercicio para el lector.

7. Ejercicio para el lector.

8. Ejercicio para el lector. □

Las leyes del álgebra de clases que hemos desarrollado nos permiten probar todas las propiedades elementales de clases sin referirnos a las definiciones de los símbolos $\cup, \cap, '$ y $\subseteq$. El siguiente es un ejemplo de como se procede.

Ejemplo 1.2.1 Pruebe que $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$.

Prueba:

$$\begin{aligned} A \cap (A' \cup B) &= (A \cap A') \cup (A \cap B) \text{ por el Teorema 1.2.6.(7)} \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \text{ por el Teorema 1.2.7.(8)} \\ &= A \cap B \text{ por el Teorema 1.2.7.(1).} \end{aligned}$$

□

La siguiente definición frecuentemente es útil: La *diferencia* de dos clases A y B es la clase de todos los elementos que pertenecen a A pero que no pertenecen a B. En símbolos,

$$A - B = A \cap B'.$$

Ejemplo 1.2.2 Pruebe que $A - B = B' - A'$.

Prueba:

$$\begin{aligned} A - B &= A \cap B' \text{ por Definición de diferencia} \\ &= B' \cap A \text{ por el Teorema 1.2.6.(2)} \\ &= B' \cap (A')' \text{ por el Teorema 1.2.4} \\ &= B' - A' \text{ por la definición de diferencia.} \end{aligned}$$

□

Es útil notar que las propiedades que involucran inclusión ($\subseteq$), en lugar de igualdad, se pueden probar usando álgebra de clases ayudándose con el Teorema 1.2.2.

Ejercicio 1.2.1 Use álgebra de clases para demostrar lo siguiente:

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
2. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
3. Si $A \cap C = \varnothing$ entonces $A \cap (B \cup C) = A \cap B$.
4. Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $A - B = A$.
5. Si $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = C$ entonces $A = C - B$.
6. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.
7. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
8. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
9. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Ejercicio 1.2.2 Definimos la operación $+$ sobre clases como sigue: Si A y B son clases entonces:

$$A + B = (A - B) \cup (B - A).$$

Pruebe lo siguiente:

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.
4. $A + A = \varnothing$.
5. $A + \varnothing = A$

Ejercicio 1.2.3 Pruebe lo siguiente:

1. Si $A \cup B = \varnothing$ entonces $A = \varnothing$ y $B = \varnothing$.
2. $A \cap B' = \varnothing$ si y sólo si $A \subseteq B$.
3. $A + B = \varnothing$ si y sólo si $A = B$.
4. $A \cup C = B \cup C$ si y sólo si $A + B \subseteq C$.
5. $(A \cup C) + (B \cup C) = (A + B) - C$.

Ejercicio 1.2.4 Use álgebra de clases para probar que si $A \subseteq B$ y $C = B - A$ entonces $A = B - C$.

1.3. Pares ordenados y productos cartesianos

Si a es un elemento podemos usar el axioma de construcción de clase para formar la clase

$$\{a\} = \{x | x = a\}.$$

Es fácil ver que $\{a\}$ contiene sólo un elemento, llamado elemento a. A una clase que contiene un solo elemento se le llama *solitaria*.

Si a y b son elementos podemos usar el axioma de construcción de clase para formar la clase

$$\{a, b\} = \{x | x = a \vee x = b\}.$$

Claramente $\{a, b\}$ contiene dos elementos, llamados los elementos a y b. Una clase que contiene exactamente dos elementos es llamada *par desordenado*, o simplemente una *pareja*.

De manera análoga podemos formar las clases $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$ y así sucesivamente.

En matemáticas frecuentemente necesitamos formar las clases cuyos elementos son parejas. Para poder hacer esto legítimamente, necesitamos un nuevo axioma que garantice que si a y b son elementos entonces la pareja $\{a, b\}$ es un elemento. Esto motiva nuestro siguiente axioma, al que se le suele llamar *Axioma de apareamiento*:

Axioma 3 Si a y b son elementos entonces $\{a, b\}$ es un elemento.

Está claro que $\{a, a\} = \{a\}$; así, al definir $a = b$ en el Axioma 3, inmediatamente obtenemos que si a es un elemento entonces la solitaria $\{a\}$ es un elemento.

Teorema 1.3.1 Si $\{x, y\} = \{u, v\}$ entonces

$$\text{o } [x = u \wedge y = v] \text{ o } [x = v \wedge y = u].$$

Prueba: Ejercicio para el lector. (Sugerencia: Considere separadamente los casos $x = y$ y $x \neq y$. Luego use el Axioma 1.) $\square$

Una noción importante en matemáticas es la de un *par ordenado* de elementos. Intuitivamente, un para ordenado es una clase que consiste de dos elementos en un orden específico. En efecto, el orden realmente no es esencial; lo que es esencial es que los pares ordenados tienen la siguiente propiedad.

Propiedad 1.3.1 Sean (a, b) y (c, d) pares ordenados. Si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$.

Nos gustaría definir pares ordenados de tal manera que no sea necesario introducir una nueva noción indefinida de "orden". Es un hecho interesante que, realmente, se puede lograr procediendo como sigue.

Definición 1.3.1 Sean a y b elementos; el *par ordenado* (a, b) se define como la clase

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Por el Axioma 3, (a, b) se puede formar legítimamente y *también es un elemento.*

Vale la pena notar que

$$(b, a) = \{\{b\}, \{b, a\}\} = \{\{b\}, \{a, b\}\}.$$

Así hay una clara distinción entre los dos posibles "ordenes" (a, b) y (b, a) ya que son dos clases distintas, resta probar que los pares ordenados, como han sido definidos, tienen la Propiedad 1.3.1.

Teorema 1.3.2 Si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$.

Prueba: Suponga que $(a, b) = (c, d)$; esto es,

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Por el Teorema 1.3.1, o

$$[\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}]$$

o

$$[\{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c\}];$$

consideraremos separadamente los dos casos.

Caso 1 $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$. De $\{a\} = \{c\}$ se sigue que $a = c$. De $\{a, b\} = \{c, d\}$ y el Teorema 1.3.1 se sigue que o $a = c$ y $b = d$, o $a = d$ y $b = c$; en el primer subcaso hemos terminado; en el segundo subcaso como $a = c$ tenemos entonces que $b = c = a = d$, con lo que terminamos el **Caso 1**.

Caso 2 $\{a\} = \{c, d\}$ y $\{a, b\} = \{c\}$. Aquí, $c \in \{c, d\}$ y $\{c, d\} = \{a\}$, así $c \in \{a\}$; por lo que $c = a$; análogamente, $d = a$. También, $b \in \{a, b\}$ y $\{a, b\} = \{c\}$, así $b \in \{c\}$; por lo que $b = c$. De tal manera que $a = b = c = d$, terminando la prueba. $\square$

Definición 1.3.2 El *producto cartesiano* de dos clases A y B es la clase de los pares ordenados (x, y) donde $x \in A$ y $y \in B$. En símbolos,

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}.$$

Las siguientes son propiedades simples del producto cartesiano.

Teorema 1.3.3 Para todas las clases A, B, C y D,

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
3. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Prueba:

1.

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

2. Ejercicio para el lector.

3.

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in C \times D \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in C \wedge y \in D \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D). \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 1.3.1 Pruebe que:

1. $A \times (B - D) = (A \times B) - (A \times D)$.
2. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$.
3. $(A \times A) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.
4. $(A \times B) - (C \times C) = [(A - C) \times B] \cup [A \times (B - C)]$.
5. $(A \times A) - (B \times C) = [(A - B) \times A] \cup [A \times (A - C)]$.
6. A y B son disjuntas si y sólo si para cualquier clase no vacía C, $A \times C$ y $B \times C$ son disjuntas.
7. Si A y C son clases no vacías, $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ si y sólo si $A \times C \subseteq B \times D$.
8. Sean A, B, C y D clases no vacías. $A \times B = C \times D$ si y sólo si $A = C$ y $B = D$.
9. $A \times B$ y $A' \times C$ son disjuntas.
10. $B \times A$ y $C \times A'$ son disjuntas.
11. $A \times B = \varnothing$ si y sólo si $A = \varnothing$ o $B = \varnothing$.
12. Si $a = \{b\}$ entonces $b \in a$.
13. $x = y$ si y sólo si $\{x\} = \{y\}$.
14. $x \in a$ si y sólo si $\{x\} \subseteq a$.
15. $\{a, b\} = \{a\}$ si y sólo si $a = b$.
16. La siguiente es una definición alternativa de par ordenado:

    $$(x, y) = \{\{x, \varnothing\}, \{y, \{\varnothing\}\}\}.$$

    Use esta definición para probar que si $(a, b) = (c, d)$ entonces $a = c$ y $b = d$.

1.4. Gráficas

Una clase de pares ordenados se llama una *gráfica*. Dicho de otra manera, una gráfica es una subclase arbitraria de $U \times U$.

Definición 1.4.1 Si G es una gráfica entonces G^{-1} es la gráfica definida mediante

$$G^{-1} = \{(x,y)|(y,x) \in G\}.$$

Definición 1.4.2 Si G y H son gráficas entonces $G \circ H$ es la gráfica definida como sigue

$$G \circ H = \{(x,y)|\exists z \ni (x,z) \in H \wedge (z,y) \in G\}.$$

Las siguientes son propiedades básicas de gráficas.

Teorema 1.4.1 Si G, H y J son gráficas entonces las siguientes propiedades se cumplen: 1. $G \circ (H \circ J) = (G \circ H) \circ J$. 2. $(G^{-1})^{-1} = G$. 3. $(G \circ H)^{-1} = H^{-1} \circ G^{-1}$.

Prueba:

1.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (G \circ H) \circ J &\Leftrightarrow \exists z \ni (x,z) \in J \wedge (z,y) \in G \circ H \\
&\Leftrightarrow \exists w \wedge \exists z \ni (x,z) \in J \wedge (z,w) \in H \wedge (w,y) \in G \\
&\Leftrightarrow \exists w \ni (x,w) \in H \circ J \wedge (w,y) \in G \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in G \circ (H \circ J)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (G^{-1})^{-1} &\Leftrightarrow (y,x) \in G^{-1} \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in G
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (G \circ H)^{-1} &\Leftrightarrow (y,x) \in G \circ H \\
&\Leftrightarrow \exists z \ni (y,z) \in H \wedge (z,x) \in G \\
&\Leftrightarrow \exists z \ni (x,z) \in G^{-1} \wedge (z,y) \in H^{-1} \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in H^{-1} \circ G^{-1}
\end{aligned}$$

$\square$

Definición 1.4.3 Sea G una gráfica. Por el *dominio* de G nos referimos a la clase
$$dom\ G = \{x | \exists y \ni (x,y) \in G\},$$
y por el *rango* de G nos referimos a la clase
$$ran\ G = \{y | \exists x \ni (x,y) \in G\}.$$

En otras palabras, el dominio de G es la clase de todos los "primeros componenetes"de los elemento de G y el rango de G es la clase de todos los "segundos componentes"de los elementos de G.

Teorema 1.4.2 Si G y H son gráficas, entonces 1. $dom\ G = ran\ G^{-1}$. 2. $ran\ G = dom\ G^{-1}$. 3. $dom\ (G \circ H) \subseteq dom\ H$. 4. $ran\ (G \circ H) \subseteq ran\ G$.

Prueba:

1.
$$\begin{aligned} x \in dom\ G &\Leftrightarrow \exists y \ni (x,y) \in G \\ &\Leftrightarrow \exists y \ni (y,x) \in G^{-1} \\ &\Leftrightarrow x \in ran\ G^{-1}, \end{aligned}$$

2. Ejercicio para el lector,

3.
$$\begin{aligned} x \in dom\ (G \circ H) &\Rightarrow \exists y \ni (x,y) \in (G \circ H) \\ &\Rightarrow \exists y \exists z \ni (x,z) \in H \wedge (z,y) \in G \\ &\Rightarrow x \in dom\ H. \end{aligned}$$

4. Ejercicio para el lector. □

Corolario 1.4.1 Sean G y H gráficas. Si $ran\ H \subseteq dom\ G$ entonces $dom\ (G \circ H) = dom\ H$.

Prueba: Ejercicio para el lector. □

Ejercicio 1.4.1 Proceda como se indica en cada inciso.

1. Sean
$$G = \{(b, b), (b, c), (c, c), (c, d)\}$$
y
$$H = \{(b, a), (c, b), (d, c)\}.$$
Encuentre $G^{-1}, H^{-1}, G \circ H, H \circ G, (G \circ H)^{-1}, (G \cup H)^{-1}, H^{-1} \circ G$.

2. Si G, H y J son gráficas, pruebe cada uno de los siguientes:

   a) $(H \cup J) \circ G = (H \circ G) \cup (J \circ G)$,
   b) $(G - H)^{-1} = G^{-1} - H^{-1}$,
   c) $G \circ (H \cap J) \subseteq (G \circ H) \cap (G \circ J)$,
   d) $(G \circ H) - (G \circ J) \subseteq G \circ (H - J)$.

3. Si G y H son gráficas, pruebe cada uno de los siguientes:

   a) $(G \cap H)^{-1} = G^{-1} \cap H^{-1}$,
   b) $(G \cup H)^{-1} = G^{-1} \cup H^{-1}$.

4. Si G, H, J y K son gráficas, pruebe:

   a) Si $G \subseteq H$ y $J \subseteq K$, entonces $G \circ J \subseteq H \circ K$,
   b) $G \subseteq H$ si y sólo si $G^{-1} \subseteq H^{-1}$.

5. Si A, B y C son clases, pruebe cada uno de los siguientes:

   a) $(A \times B)^{-1} = B \times A$,
   b) Si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces $(A \times B) \circ (A \times B) = A \times B$,
   c) Si A y B son disjuntas, entonces $(A \times B) \circ (A \times B) = \varnothing$,
   d) Si $B \neq \varnothing$, entonces $(B \times C) \circ (A \times B) = A \times C$.

6. Sean G y H gráficas, pruebe cada uno de los siguientes:

   a) Si $G \subseteq A \times B$, entonces $G^{-1} \subseteq B \times A$,
   b) Si $G \subseteq A \times B$ y $H \subseteq B \times C$, entonces $H \circ G \subseteq A \times C$.

7. Si G y H son gráficas, pruebe cada uno de los siguientes:

   a) $dom\ (G \cup H) = (dom\ G) \cup (dom\ H)$, *b*) $ran\ (G \cup H) = (ran\ G) \cup (ran\ H)$,

c) $dom\ G - dom\ H \subseteq dom\ (G - H)$,

d) $ran\ G - ran\ H \subseteq ran\ (G - H)$.

8. Sea G una gráfica y sea B una subclase del dominio de G. Por la *restricción de G a B* nos referimos a la gráfica

$$G_{[B]} = \{(x,y)|(x,y) \in G \wedge x \in B\}.$$

Pruebe cada uno de los siguientes:

a) $G_{[B]} = G \cap (B \times ran\ G)$,

b) $G_{[B \cup C]} = G_{[B]} \cup G_{[C]}$,

c) $G_{[B \cap C]} = G_{[B]} \cap G_{[C]}$,

d) $(G \circ H)_{[B]} = G \circ H_{[B]}$.

9. Sea G una gráfica y sea B una subclase del dominio de G. Usaremos el símbolo $G(B)$ para designar la clase

$$G(B) = \{y|\exists x \in B \ni (x,y) \in G\}.$$

Pruebe cada uno de los siguientes:

a) $G(B) = ran\ G_{[B]}$,

b) $G(B \cup C) = G(B) \cup G(C)$,

c) $G(B \cap C) = G(B) \cap G(C)$,

d) Si $B \subseteq C$, entonces $G(B) \subseteq G(C)$.

1.5. Unión e intersección generalizadas

Considere la clase $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$; sus elementos están indexados por los números $1, 2, \ldots, n$. A tal clase frecuentemente se le llama familia indexada de clases; a los números $1, 2, \ldots, n$ se les llama índices y a la clase $\{1, 2, \ldots, n\}$ se le llama la clase índice.

Generalizando, frecuentemente consideramos una clase I cuyos elementos $i, j, k, \ldots$ sirven como índices para designar a los elementos de una clase $\{A_i, A_j, A_k, \ldots\}$. La clase $\{A_i, A_j, A_k, \ldots\}$ es llamada *familia indexada de* *clases*, I es llamada su *clase índice*, y los elementos de I son llamados *índices*. Una notación compacta que se usa frecuentemente para designar a la clase $\{A_i, A_j, A_k, \ldots\}$ es

$$\{A_i\}_{i\in I}$$

Así, hablando informalmente, $\{A_i\}_{i\in I}$ es la clase de todas las clases A_i, con i variando en I.

Observación 1.5.1 La definición de una familia indexada de clases que hemos dado es intuitiva; descansa sobre la noción intuititva de *indexación*. Esta defición intuitiva es adecuada en este momento; no obstante, para referencias futuras, damos ahora la definición formal del mismo concepto:

Por una familia indexada de clases, $\{A_i\}_{i\in I}$, nos referimos a una gráfica G cuyo dominio es I; para cada $i \in I$ definimos A_i mediante

$$A_i = \{x|(i, x) \in G\}.$$

Por ejemplo, considere $\{A_i\}_{i\in I}$ donde $I = \{1, 2\}$, $A_1 = \{a, b\}$ y $A_2 = \{c, d\}$. Entonce, formalmente, $\{A_i\}_{i\in I}$ es la gráfica

$$G = \{(1, a), (1, b), (2, c), (2, d)\}.$$

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia indexada de clases tal que para cada $i \in I$, A_i es un elemento, entonces $\{A_i|i \in I\}$ designará la clase cuyos elementos son todos los A_i, esto es, $\{A_i|i \in I\} = \{x|x = A_i \text{ para algún } i \in I\}$. No obstante, seguiremos la notación matemática usual y emplearemos las dos expresiones $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{A_i|i \in I\}$ intercambiablemente.

Definición 1.5.1 Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de clases. La *unión de las clases* A_i consiste de todos los elementos que pertenecen al menos a una clase A_i de la familia. En símbolos,

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x|\exists j \in I \ni x \in A_j\}.$$

La *intersección de las clases* A_i consiste de todos los elementos que pertenecen a toda clase A_i de la familia. En símbolos,

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x|\forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Las siguientes son algunas propiedades básicas de las familias indexadas de clases.

Teorema 1.5.1 Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de clases.

1. Si $A_i \subseteq B$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$.
2. Si $B \subseteq A_i$ para todo $i \in I$, entonces $B \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$.

Prueba:

1. Suponga que $A_i \subseteq B$ para todo $i \in I$; ahora si $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, entonces $x \in A_j$ para algún $j \in I$, pero $A_j \subseteq B$, así $x \in B$. Así $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$.
2. Ejercicio para el lector. $\square$

Teorema 1.5.2 (*Leyes generalizadas de De Morgan*). Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia indexada de clases. Entonces

1. $(\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$.
2. $(\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$.

Prueba:

1.
$$\begin{aligned} x \in (\bigcup_{i\in I} A_i)' &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i' \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i'. \end{aligned}$$

2. Ejercicio para el lector. $\square$

Teorema 1.5.3 (*Leyes distributivas generalizadas*) Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ familias indexadas de clases. Entonces

1. $(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$.
2. $(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cup B_j)$.

Prueba:

1.

$$\begin{aligned}
x \in (\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i \wedge x \in \bigcup_{j\in J} B_j \\
&\Leftrightarrow x \in A_h \text{ para algún } h \in I \wedge \\
&\ x \in B_k \text{ para algún } k \in J \\
&\Leftrightarrow x \in A_h \cap B_k \text{ para algún } (h,k) \in I \times J \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j).
\end{aligned}$$

2. Ejercicio para el lector. □

Un teorema concerniente a la unión de gráficas será útil en el siguiente capítulo.

Teorema 1.5.4 Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de gráficas. Entonces

1. $dom(\bigcup_{i\in I} G_i) = \bigcup_{i\in I}(dom\ G_i)$.
2. $ran(\bigcup_{i\in I} G_i) = \bigcup_{i\in I}(ran\ G_i)$.

Prueba:

1.

$$\begin{aligned}
x \in dom(\bigcup_{i\in I} G_i) &\Leftrightarrow \exists y \ni (x,y) \in \bigcup_{i\in I} G_i, \text{ por 1.4.3} \\
&\Leftrightarrow \exists y \ni (x,y) \in G_j \text{ para algún } j \in I, \text{ por 1.5.1} \\
&\Leftrightarrow x \in dom\ G_j \text{ para algún } j \in I, \text{ por 1.4.3} \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(dom\ G_i), \text{ por 1.5.1.}
\end{aligned}$$

2. Ejercicio para el lector. □

Una notación variante para la unión e intersección de una familia de clases es útil a veces. Si $\mathcal{A}$ es una clase (sus elementos son necesariamente clases), definimos la *unión* de $\mathcal{A}$, o la *unión de los elementos de* $\mathcal{A}$, como la unión de todas las clases que son elementos de $\mathcal{A}$. En símbolos,

Definición 1.5.2

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x|x \in A \text{ para algún } A \in \mathcal{A}\}$$

En otras palabras, $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ si y sólo si existe una clase A tal que $x \in A$ y $A \in \mathcal{A}$. Análogamente, definimos la *intersección de los elementos de* $\mathcal{A}$, como la intersección de todas las clases que son elementos de $\mathcal{A}$. En símbolos,

Definición 1.5.3

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x|x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{A}\}$$

Ejemplo 1.5.1 Sea $\mathcal{A} = \{K, L, M\}$, donde $K = \{a, b, d\}$, $L = \{a, c, d\}$ y $M = \{d, e\}$. Entonces

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{a, b, c, d, e\} \text{ y } \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{d\}$$

.

Observación 1.5.2 Es práctica frecuente, en la literatura de teoría de conjuntos, escribir

$$\bigcup \mathcal{A} \text{ en lugar de } \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$

y

$$\bigcap \mathcal{A} \text{ en lugar de } \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$$

Ocasionalmente seguiremos esta práctica.

Ejercicio 1.5.1 Proceda como se indica en cada inciso.

1. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ dos familias de clases con la misma clase índice I. Suponga que $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$, pruebe que: *a*) $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$. *b*) $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$.

2. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ familias indexadas de clases. Pruebe lo siguiente.

   a) $(\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$.

b) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i \times B_j)$.

3. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ familias indexadas de clases. Suponga que $\forall i \in I$, $\exists j \in J \ni B_j \subseteq A_i$. Pruebe que

$$\bigcap_{j\in J} B_j \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$$

.

4. Sean $a = \{u, v, w\}$, $b = \{w, x\}$, $c = \{w, y\}$, $r = \{a, b\}$, $s = \{b, c\}$ y $p = \{r, s\}$. Encuentre las clases: $\cup(\cup p)$, $\cap(\cap p)$, $\cup(\cap p)$ y $\cap(\cup p)$.

5. Pruebe que $\cap(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\cap\mathcal{A}) \cap (\cap\mathcal{B})$.

1.6. Conjuntos

Indudablemente, todo lo que hemos dicho en las páginas anteriores es muy familiar al lector. Aunque dijimos *clase* donde el lector está más acostumbrado a oir *conjunto*, es obvio que la "unión" e "intersección" que hemos definido son precisamente las familiares unión e intersección de conjuntos, el "producto Cartesiano" es exactamente el producto Cartesiano usual de conjuntos y similarmente para los otros conceptos introducidos.

En este punto, parece como si todo lo que estamos acostumbrados a hacer con conjuntos se puede hacer con clases. Así, el lector muy bien prodría preguntar, "¿por qué molestarse en distinguir entre clases y conjuntos? ¿Por qué no desarrollar toda la matemática en términos de clases?" Ya que, como hemos dicho, una clase significa "cualquier colección de elementos", ¿por qué no simplemente le llamamos a una clase un conjunto, y acabamos de una vez? La respuesta a esta pregunta es de gran importancia; el principal propósito de esta sección es explicar por qué queremos distinguir entre clases y conjuntos.

Primero, notemos que el axioma de construcción de clases (Axioma A2) nos permite formar la *clase de todos los elementos* que satisfacen una propiedad dada; pero no nos permite formar la *clase de todas las clases* que satisfacen una propiedad dada. La razon de esta limitación es obvia: si pudieramos formar la clase de todas las clases que satisfacen cualquier propiedad dada, entonces podriamos formar la "clase de Russell" de todas las clases que no son elementos de si mismas, esto nos daría la paradoja de Russell.

Después, notemos que en matemática frecuentemente necesitamos formar *conjuntos de conjuntos* particulares. Unos pocos ejemplos que vienen a la mente son los siguientes:

El conjunto de todos los intervalos cerrados $[a, b]$ de números reales.

El conjunto de todas las secuencias convergentes de números reales.

El conjunto de todas las líneas en el plano (donde cada línea se considera como un conjunto de puntos).

Veamos más de cerca el primer ejemplo; en una discusión en cálculo elemental, nos sentiriamos perfectamente libres de decir "$\mathcal{A}$ consiste de todos los conjuntos que son intervalos cerrados $[a, b]$ de números reales." Ahora si los "conjuntos" no fueran diferentes de las "clases" entonces, por el párrafo precedente, no podriamos formar $\mathcal{A}$. Esto sería una restricción intolerable a nuestra libertad de operar conjuntos en matemáticas.

Recapitulemos: La noción de *clase* es atractiva por su simplicidad intuitiva y generalidad; no obstante, existe un serio inconveniente al tratar con clases, a saber que no es permisible [para una propiedad arbitraria $P(X)$] formar la "clase de todas las clases X que satisfacen $P(X)$". Esto sería una restricción intolerable a nuestra libertad de acción si fueramos a basar la matemática en clases. En su lugar, basamos la matemática en *conjuntos*; el concepto de un conjunto es algo más estrecho que el de una clase; los conjuntos serán definidos de tal manera, no obstante, que para cualquier propiedad $P(X)$ *sea legítimo formar la clase de todos los conjuntos que satisfacen* $P(X)$.

Así, la libertad que requerimos nos es restaurada, siempre y cuando estemos dispuestos a tratar con conjuntos más que con la noción más amplia de clase. Estamos más que dispuestos a hacer esto, ya que, como seremos capaces de mostrar, todas las clases con las que tratamos en matemáticas *son conjuntos*.

Ahora, ¿cómo deben ser definidos los conjuntos? Para responder esta pregunta, es esencial que recordemos, una vez más, que estamos buscando una manera de definir conjuntos que legitime formar la clase de todos los *conjuntos* X que satisfacen cualquier propiedad $P(X)$. Una respuesta obvia es identificar conjuntos con elementos: sea un conjunto la misma cosa que un elemento. Entonces el Axioma A2 ciertamente nos permitirá formar la clase de todos los conjuntos X que satisfacen la propiedad $P(X)$.

Esta respuesta simple es, en efecto, la única que ha sido adoptada por la mayoría de los matemáticos. La usaremos aquí, así,

Definición 1.6.1 Por un *conjunto* se entiende a cualquier clase que es un elemento de una clase.

Esta definición se admite por nuestra percepción intuitiva de lo que un conjunto debe ser. Por que si $A, B, C, \ldots$ son conjuntos, es perfectamente razonable que deberiamos ser capaces de formar la clase $\{A, B, C, \ldots\}$ cuyos elementos son $A, B, C, \ldots$. En otras palabras, muy ciertamente esperariamos que todo conjunto sea un elemento. Lo opuesto es igualmente razonable: porque si A no es un conjunto, entonces A es una clase propia, y anteriormente hemos visto que para evitar contradicciones, las clases propias no deben ser elementos de cosa alguna. Así, si A no es un conjunto, entonces A no es un elemento.

En el resto de esta sección, estableceremos los axiomas básicos que tratan con conjuntos. El propósito principal de estos axiomas es garantizar que cuando las operaciones usuales de teoría de conjuntos son aplicadas a conjuntos, el resultado, cada vez, es un conjunto.

Primero, notemos que el Axioma de Apareamiento, nuestro Axioma 3, puede ser restablecido así:

Axioma 4 Si a y b son conjuntos, entonces $\{a, b\}$ es un conjunto.

Ahora, si B es un conjunto y $A \subseteq B$, uno razonablemente esperaría que A sea un conjunto. Este es el contenido de nuestro siguiente axioma, llamado el *Axioma de Subconjuntos*.

Axioma 5 Toda subclase de un conjunto es un conjunto.

Por el Teorema 1.2.1(2), $A \cap B \subseteq A$; así, por el Axioma 5, si A es un conjunto, entonces $A \cap B$ es un conjunto. En particular, *la intersección de cualesquiera dos conjuntos es un conjunto.*

La unión de "no demasiados" conjuntos debe ser un conjunto. Esto es garantizado por el siguiente axioma, llamado el *Axioma de Uniones*:

Axioma 6 Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de conjuntos, entonces $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es un conjunto.

Si A y B son conjuntos, entonces, por el Axioma 4, $\{A, B\}$ es un conjunto; inmediatamente se sigue de la Definición 1.5.2 que $\bigcup_{X \in \{A,B\}} X = A \cup B$; así, por el Axioma 6, $A \cup B$ es un conjunto. Esto muestra que *la unión de dos conjuntos es un conjunto.*

Observación 1.6.1 Por el Axioma 4, todo doble es un conjunto. Aún más, si hacemos $a = b$ en el Axioma 4, todo soltero es un conjunto. Ya que la unión de dos conjuntos es un conjunto, se sigue que toda clase de tres elementos es un conjunto, toda clase de cuatro elementos es un conjunto y así sucesivamente. Por ello, en un sentido intuitivo, toda clase finita es un conjunto.

A continuación, estableceremos que si A es un conjunto, entonces la clase de todos los subconjuntos de A es un conjunto. Empezamos con una definición.

Definición 1.6.2 Sea A un conjunto, por el *conjunto potencia* de A nos referimos a la clase de todos los subconjuntos de A. En símbolos, el conjunto potencia de A es la clase

$$\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}.$$

Note que por el Axioma 5, $\mathcal{P}(A)$ es la clase de todos los *conjuntos* B que satisfacen $B \subseteq A$. Por la Definición 1.6.1 y el Axioma 2, es legítimo formar esta clase.

El siguiente es llamado el *Axioma de Conjuntos Potencia*:

Axioma 7 Si A es un conjunto, entonces $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto.

Ejemplo 1.6.1 Si $A = \{a, b\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

De todo lo que hemos dicho hasta aquí, aún no se sigue que existe algún conjunto. Para llenar este vacío, establecemos un axioma temporal, el cual será sustituido por el Axioma A9:

T La clase vacía es un conjunto.

De aquí en adelante nos referiremos a $\varnothing$ como el *conjunto* vacío.

A partir del Axioma T, junto con A3 y A5, podemos inferir la existencia de una gran cantidad de conjuntos. Tenemos al conjunto vacío, $\varnothing$; tenemos solteros tales como $\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}$, etc.; tenemos dobles tales como $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, formados por cualesquiera dos de los anteriores. Similarmente, tomando repetidamente uniones de los anteriores, podemos formar conjuntos con *cualquier número finito* de elementos.

Observación 1.6.2 Una consecuencia importante del Axioma A6 es la siguiente. Si A es un conjunto, entonces claramente

$$B = \{X | X \subseteq A \wedge P(X)\}$$

es la clase de todos los subconjuntos de A los cuales satisfacen la propiedad P; por el Axioma A4, el Axioma A2 puede usarse legítimamente para forma la clase B. Ahora si $X \in B$, entonces X es un subconjunto de A, así $X \in \mathcal{P}(A)$; así $B \subseteq \mathcal{P}(A)$. Pero por el Axioma A6, $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto, así por el Axioma A4, B es un conjunto. Podemos resumir como sigue: si A es un conjunto y $P(X)$ es una propiedad de X, entonces *la clase de todos los subconjuntos de A que satisfacen $P(X)$ es un conjunto.*

Teorema 1.6.1 Si A y B son conjuntos, entonces $A \times B$ es un conjunto.

Prueba: Sean A y B conjuntos. Por el Axioma A5, $A \cup B$ es un conjunto; por el Axioma A6, $\mathcal{P}(A \cup B)$ es un conjunto; finalmente, de nuevo por el Axioma A6, $\mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup B)]$ es un conjunto. Probemos que $A \times B \subseteq \mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup B)]$ y se seguirá, por el Axioma A4, que $A \times B$ es un conjunto.

Sea $(x, y) \in A \times B$. Por 1.3.1, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Ahora $x \in A \cup B$, así $\{x\} \subseteq A \cup B$, así $\{x\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Similarmente, $x \in A \cup B$ y $y \in A \cup B$, así $\{x, y\} \subseteq A \cup B$, luego $\{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Hemos demostrado que $\{x\}$ y $\{x, y\}$ son elementos de $\mathcal{P}(A \cup B)$, por lo tanto

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

se sigue que

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup B)]$$

esto es

$$(x, y) \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup B)].$$

Así

$$A \times B \subseteq \mathcal{P}[\mathcal{P}(A \cup B)].$$

□

Se sigue del Teorema 1.6.1 y el Axioma A4 que si A y B son conjuntos, entonces cualquier gráfica $G \subseteq A \times B$ es un conjunto.

Es fácil mostrar que si G es un conjunto, entonces *dom* G y *ran* G son conjuntos. Usando este hecho, uno puede mostrar fácilmente que si G y H son conjuntos, entonces $G \circ H$ y G^{-1} son conjuntos.

Capítulo 2

Funciones

2.1. Introducción

El concepto de función es una de las ideas más básicas y se encuentra en casi cualquier discusión matemática. Generalmente una función se define como sigue: Si A y B son clases, entonces una función de A a B es una regla que le asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$; para indicar esta conexión entre x y y usualmente escribimos $y = f(x)$. Por ejemplo, considere la función $y = \sin x$; si tomamos a A como el conjunto de los números reales y a B como el intervalo cerrado $[-1, 1]$, entonces es fácill ver que $y = \sin x$ es uan regla que le asigna a todo número $x \in A$ un único número $y \in B$.

La gráfica de una función se define como sigue: Si f es una función de A a B, entonces la gráfica de f es la clase de todos los pares ordenados (x, y) tal que $y = f(x)$. Por ejemplo, sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ y f la función definida por la siguiente tabla:

x	$f(x)$
a	d
b	e
c	d

La gráfica de f es $\{(a, d), (b, e), (c, d)\}$.

Claramente, podemos usar la información contenida en la tabla para construir la gráfica de f; también podemos operar de otra manera, esto es, podemos usar la información contenida en la gráfica para construir la tabla de

f. Así, una función f determina completamente a su gráfica, e inversamente, una gráfica determina completamente a su función. De tal manera que no hay necesidad de distinguir entre una función y su gráfica.

Dado que una función y su gráfica son esencialmente una y la misma cosa, podemos, si queremos, *definir* que una función es una gráfica. Al hacerlo así ganaremos una importante ventaja, a saber, evitamos tener que introducir la palabra *regla* como un nuevo concepto indefinido de teoría de conjuntos. Por esta razón es costumbre, en tratamientos rigurosos de matemáticas, introducir la noción de *función* via la de *gráfica*. Seguiremos este procedimiento aquí.

2.2. Conceptos y definiciones fundamentales

Empecemos dando nuestra definición "oficial" de función.

Definición 2.2.1 Una *función de A a B* es un triple[1] de objetos $< f, A, B >$, donde A y B son clases y f es una subclase de $A \times B$ con las siguientes propiedades:

F1 $\forall x \in A, \exists y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

F2 Si $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$ entonces $y_1 = y_2$.

Se acostumbra escribir $f : A \to B$ en lugar de $< f, A, B >$.

En aplicaciones matemáticas ordinarias, toda función $f : A \to B$ es una función de un conjunto A a un conjunto B. No obstante, el concepto intuitivo de función de A a B se aplica a cualesquiera dos colecciones A y B, sin importar que A y B sean conjuntos o clases propias, es natural dar la definición de una función en su forma más general, por ello se estableció que A y B son cualesquiera clases. Una vez más, todo conjunto es una clase, así todo lo que tenemos que decir sobre funciones de una clase A a una clase B se aplica, en particular, a funciones de un conjunto A a un conjunto B.

[1]Si f, A y B no son todos conjuntos, el triple ordenado $< f, A, B >$ se puede definir, formalmente, así:

$$< f, A, B >= (f \times \{\varnothing\}) \cup (A \times \{\{\varnothing\}\}) \cup (B \times \{\{\{\varnothing\}\}\}).$$

Sea $f : A \to B$ una función; si $(x, y) \in f$ decimos que *y es la imagen de x* (con respecto a f); también decimos que *x es la preimagen de y* (con respecto a f); también se dice que *f mapea x sobre y* y lo simbolizamos mediante $x \overset{f}{\mapsto} y$.

Así, **F1** enuncia que

todo elemento $x \in A$ tiene una imagen $y \in B$.

F2 enuncia que si $x \in A$, entonces

la imagen de x es única;

porque si $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$, esto es, tanto y_1 como y_2 son imágenes de x, entonces **F2** dicta que $y_1 = y_2$. Se sigue que **F1** y **F2** combinadas enuncian que:

Definición 2.2.2 Todo elemento $x \in A$ tiene una imagen determinada únicamente $y \in B$.

Teorema 2.2.1 Sean A y B clases y sea f una gráfica. Entonces $f : A \to B$ es una función si y sólo si: I) **F2** se cumple, II) *dom* $f = A$ y III) *ran* $f \subseteq B$.

Prueba: (si) Suponga que $f : A \to B$ es una función; por 2.2.1, **F2** se cumple. Aún más,

a)

$$\begin{aligned} x \in dom\ f &\Rightarrow \exists y \ni (x, y) \in f, \text{ por } 1.4.3 \\ &\Rightarrow (x, y) \in A \times B, \text{ porque } f \subseteq A \times B, \text{ por } 2.2.1 \\ &\Rightarrow x \in A, \text{ por } 1.3.2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \exists y \in B \ni (x, y) \in f \text{ por } \mathbf{F1} \\ &\Rightarrow x \in dom\ f, \text{ por } 1.4.3. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
y \in ran\ f &\Rightarrow \exists x \ni (x,y) \in f, \text{ por 1.4.3}\\
&\Rightarrow (x,y) \in A \times B, \text{ porque } f \subseteq A \times B, \text{ por 2.2.1}\\
&\Rightarrow y \in B, \text{ por 1.3.2.}
\end{aligned}$$

Por a) y b), *dom* $f = A$; por c), *ran* $f \subseteq B$. Así 2.2.1.I, 2.2.1.II y 2.2.1.III se cumplen.

(sólo si) Recíprocamente, suponga que 2.2.1.I, 2.2.1.II y 2.2.1.III se cumplen. Tenemos:

a)

$$\begin{aligned}
(x,y) \in f &\Rightarrow x \in dom\ f \text{ y } y \in ran\ f, \text{ por 1.4.3}\\
&\Rightarrow x \in A \text{ y } y \in B, \text{ por 2.2.1.II y 2.2.1.III}\\
&\Rightarrow (x,y) \in A \times B, \text{ por 1.3.2.}
\end{aligned}$$

b) Sea x un elemento arbitrario de A. Por 2.2.1.II, $x \in dom\ f$; así $\exists y \ni (x,y) \in f$; pero $y \in ran\ f$, así por 2.2.1.III, $y \in B$. Esto prueba que **F1** se cumple. Por 2.2.1.I, **F2** se cumple; así, por la Definición 2.2.1, $f : A \to B$ es una función. □

Corolario 2.2.1 Sea $f : A \to B$ una función; si C es cualquier clase tal que *ran* $f \subseteq C$ entonces $f : A \to C$ es una función.

Prueba: Si $f : A \to B$ es una función, entonces por el Teorema 2.2.1, **F2** se cumple y *dom* $f = A$; así, si *ran* $f \subseteq C$, entonces por el Teorema 2.2.1, $f : A \to C$ es una función. □

Sea $f : A \to B$ una función y sea $x \in A$; se acostumbra usar el símbolo $f(x)$ para designar la imagen de x. Así,

$y = f(x)$ **tiene el mismo significado que** $(x,y) \in f$.

Usando esta convención, las condiciones **F1** y **F2** toman la forma:

F1 $\forall x \in A, \exists y \in B, y = f(x)$.

F2 Si $y_1 = f(x)$ y $y_2 = f(x)$ entonces $y_1 = y_2$.

Teorema 2.2.2 Sean $f : A \to B$ y $g : A \to B$ funciones. Entonces $f = g$ si y sólo si $f(x) = g(x), \forall x \in A$.

Prueba: Primero, asumamos que $f = g$. Entonces, para un $x \in A$ arbitrario,

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in g \Leftrightarrow y = g(x);$$

así, $f(x) = g(x)$.

Recíprocamente, asuma que $f(x) = g(x), \forall x \in A$. Entonces

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow (x, y) \in g;$$

así, $f = g$. □

Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas

Las siguientes definiciones son de gran importancia en el estudio de funciones.

Definición 2.2.3 Una función $f : A \to B$ se dice que es *inyectiva* si tiene la siguiente propiedad:

INJ Si $(x_1, y) \in f$ y $(x_2, y) \in f$, entonces $x_1 = x_2$.

Note que **INJ** simplemente enuncia que si y es cualquier elemento de B, entonces

y **no tiene más de una preimagen**;

porque si $(x_1, y) \in f$ y $(x_2, y) \in f$, esto es, si x_1 y x_2 son ambos preimágenes de y, entonces **INJ** dicta que $x_1 = x_2$.

Usando nuestra notación para imágenes podemos escribir **INJ** como: si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

Definición 2.2.4 Una función $f : A \to B$ se dice que es *sobreyectiva* si tiene la siguiente propiedad:

SURJ $\forall y \in B, \exists x \in A \ni y = f(x)$.

La condición **SURJ** enuncia que *todo* elemento de B es la imagen de algún elemento de A, esto es, $B \subseteq ran\ f$, pero por el Teorema 2.2.1-III $ran\ f \subseteq B$, así $f : A \to B$ **es sobreyectiva si y sólo si** $ran\ f = B$.

Definición 2.2.5 Una función $f : A \to B$ se dice que es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Decir que $f : A \to B$ es inyectiva es decir que todo elemento de B es la imagen de *no más de un elemento* de A; decir que f es sobreyectiva es decir que todo elemento de B es la imagen de *al menos un* elemento de A; así, decir que f es biyectiva es decir que todo elemento de B es la imagen de *exactamente un* elemento de A. En otras palabras, si $f : A \to B$ es una función biyectiva, todo elemento de A tiene exactamente una imagen en B y todo elemento de B tiene exactamente un preimagen en A; así todos los elementos de A y todos los elementos de B están asociados en pares; por esta razón, si f es biyectiva, a veces se le llama *correspondencia uno-a-uno* entre A y B.

Definición 2.2.6 Si existe una función biyectiva $f : A \to B$ entonces decimos que A y B *están en correspondencia uno-a-uno.*

Ejemplos de funciones

Ejemplo 2.2.1 *Función Identidad.* Sea A una clase, por la *función identidad sobre* A nos referimos a la función $I_A : A \to A$ dada por

$$I_A(x) = x, \forall x \in A.$$

En otras palabras,

$$I_A = \{(x, x) | x \in A\}.$$

I_A claramente es inyectiva, suponga que $I_A(x) = I_A(y)$, por definición $I_A(x) = x$ y $I_A(y) = y$, así $x = y$; es decir, **INJ** se cumple. I_A es sobreyectiva porque, obviamente, el rango de I_A es A. Así, I_A es biyectiva.

Ejemplo 2.2.2 *Función constante.* Sean A y B clases, y sea b un elemento de B. Por la *función constante* K_b nos referimos a la función $K_b : A \to B$ dada por

$$K_b(x) = b, \forall x \in A.$$

En otras palabras, $K_b = \{(x, b) | x \in A\}$.

Note que si A tiene más de un elemento, K_b no es inyectiva; si B tiene más de un elemento, K_b no es sobreyectiva.

Ejemplo 2.2.3 *Función inclusión* Sea A una clase y B una subclase de A. Por la *función inclusión de B en A* nos referimos a la función $E_B : B \to A$ dada por

$$E_B(x) = x,\ \forall x \in B.$$

Note que si $B = A$, la función inclusión coincide con la función identidad I_A. Por el argumento usado en el ejemplo 2.2.1, E_B es inyectiva; no obstante, si $B \neq A$, entonces E_B no es sobreyectiva.

Ejemplo 2.2.4 *Función característica.* Sea 2 que designa a una clase con dos elementos, digamos que a la clase $\{0,1\}$. si A es una clase y B es una subclase de A, la *función característica de B en A* es la función $C_B : A \to 2$ dada por

$$C_B(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in B, \\ 1 \text{ si } x \notin B, \end{cases} \quad \forall x \in A.$$

Así C_B mapea todo elemento de B sobre 0 y todo elemento de $A - B$ sobre 1.

Ejemplo 2.2.5 *Restricción de una función.* Sea $f : A \to B$ una función y sea C una subclase de A. Por la *restricción de f a C* nos referimos a la función $f_{[C]} : C \to B$ dada por

$$f_{[C]}(x) = f(x),\ \forall x \in C.$$

Para decirlo de otra manera, $f_{[C]} = \{(x,y) | (x,y) \in f \wedge x \in C\}$. Note que $f_{[C]} \subseteq f$.

Las restricciones de funciones tienen las siguientes propiedades, que nos serán útiles posteriormente.

Teorema 2.2.3 Si $f : B \cup C \to A$ es una función entonces $f = f_{[B]} \cup f_{[C]}$.

La prueba de este teorema simple se deja al lector.

Teorema 2.2.4 Sean $f_1 : B \to A$ y $f_2 : C \to A$ funciones donde $B \cap C = \varnothing$. Si $f = f_1 \cup f_2$ entonces lo siguiente se cumple:

I) $f : B \cup C \to A$ es una función.

II) $f_1 = f_{[B]}$ y $f_2 = f_{[C]}$.

III) Si $x \in B$ entonces $f(x) = f_1(x)$ y si $x \in C$ entonces $f(x) = f_2(x)$.

Prueba: Empezaremos probando las siguientes dos relaciones.

a) $(x, y) \in f$ y $x \in B \Leftrightarrow (x, y) \in f_1$.

b) $(x, y) \in f$ y $x \in C \Leftrightarrow (x, y) \in f_2$,

Si $(x, y) \in f_1$, entonces $x \in B$ ya que $dom\ f_1 = B$, y $(x, y) \in f$ ya que $f = f_1 \cup f_2$. Recíprocamente, suponga $(x, y) \in f$ y $x \in B$: $(x, y) \in f$ implica que $(x, y) \in f_1$ o $(x, y) \in f_2$; si $(x, y) \in f_2$, entonces $x \in C$ (porque $dom\ f_2 = C$), lo cual es imposible ya que $x \in B$ y $B \cap C = \varnothing$, así, $(x, y) \in f_1$. Esto prueba a), la prueba de b) es análoga. Ahora probemos que

c) $dom\ f = B \cup C$ y $ran\ f \subseteq A$.

En verdad, por el teorema 1.5.4,

$$dom(f_1 \cup f_2) = dom\ f_1 \cup dom\ f_2 = B \cup C,$$

y

$$ran(f_1 \cup f_2) = ran\ f_1 \cup ran\ f_2 \subseteq A.$$

Nuestro siguiente paso será probar que

d) f satisface la condición **F2**.

Suponga que $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$; ahora $x \in dom\ f$, así por c), $x \in B$ o $x \in C$. Si $x \in B$, entonces, por a), $(x, y_1) \in f_1$ y $(x, y_2) \in f_1$, así por la definición 2.2.1, $y_1 = y_2$; si $x \in C$, entonces, por b), $(x, y_1) \in f_2$ y $(x, y_2) \in f_2$, así por la definición 2.2.1, $y_1 = y_2$; esto prueba d). De c), d) y el teorema 2.2.1, concluimos que $f : B \cup C \to A$ es una función.

De a) y el ejemplo 2.2.5, $(x, y) \in f_1 \Leftrightarrow (x, y) \in f_{[B]}$, esto es, $f_1 = f_{[B]}$; análogamente, $f_2 = f_{[C]}$.

Finalmente, a) enuncia que

$$[y = f(x) \wedge x \in B] \Leftrightarrow y = f_1(x)$$

y b) enuncia que

$$[y = f(x) \wedge x \in C] \Leftrightarrow y = f_2(x);$$

así III) se cumple. $\square$

Ejercicio 2.2.1 Resuelva los siguientes problemas:

1. Pruebe que las funciones identidad, constante, inclusión, característica y la restricción de una función califican como funciones de acuerdo a la definicón de función, en otras palabras que cumplen **F1** y **F2**.

2. Si $f : A \to B$ es un función inyectiva y $C \subseteq A$ entonces $f_{[C]} : C \to B$ es un función inyectiva.

3. Sea A una clase y sea $f = \{(x, (x, x)) | x \in A\}$. Muestre que f es una función biyectiva de A en I_A.

4. Sean $f : A \to B$ y $g : A \to B$ funciones. Pruebe que si $f \subseteq g$ entonces $f = g$.

5. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones. El *producto* de f y g es la función definida como sigue:

$$[f \cdot g](x, y) = (f(x), g(y)) \text{ para todo } (x, y) \in A \times C.$$

Pruebe que $f \cdot g$ es una función de $A \times C$ en $B \times D$. Pruebe que si f y g son inyectivas entonces $f \cdot g$ es inyectiva y que si f y g son sobreyectivas entonces $f \cdot g$ es sobreyectiva. Pruebe que $ran\ [f \cdot g] = (ran\ f) \times (ran\ g)$.

2.3. Propiedades de funciones compuestas y funciones inversas

Los siguientes teoremas expresan algunas propiedades básicas de funciones.

Teorema 2.3.1 Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones entonces $g \circ f : A \to C$ es una función.

Prueba:

I) Por el corolario 1.4.1, $dom\ g \circ f = dom\ f = A$, por el teorema 1.4.2.4, $ran\ g \circ f \subseteq ran\ g \subseteq C$.

II) Suponga que $(x, z_1) \in g \circ f$ y que $(x, z_2) \in g \circ f$; por la definición 1.4.2, $\exists y_1 \ni (x, y_1) \in f$ y $(y_1, z_1) \in g$ y $\exists y_2 \ni (x, y_2) \in f$ y $(y_2, z_2) \in g$. De $(x, y_1) \in f$ y $(x, y_2) \in f$ concluimos, por la definición 2.2.1, que $y_1 = y_2$; así, $(y_1, z_1) \in g$ y $(y_1, z_2) \in g$. Se sigue por **F2** (aplicada a g) que $z_1 = z_2$; así, $g \circ f$ satisface **F2**.

De I), II) y el teorema 2.2.1, concluimos que $g \circ f : A \to C$ es una función.$\square$

Por la Definición 1.4.2, $(x, y) \in g \circ f$ si y sólo si para algún elemento z, $(x, z) \in f$ y $(z, y) \in g$. Así, $x \overset{g \circ f}{\mapsto} y$ si y sólo si para algún z, $x \overset{f}{\mapsto} z$ y $z \overset{g}{\mapsto} y$. Esto es lo mismo como decir que $y = [g \circ f](x)$ si y sólo si para algún z, $z = f(x)$ y $y = g(z)$. Por lo cual obtenemos la siguiente:

Definición 2.3.1

$$[g \circ f](x) = g(f(x)).$$

Definición 2.3.2 Una función $f : A \to B$ se dice que es *invertible* si $f^{-1} : B \to A$ es una función.

Sea $f : A \to B$ una función invertible; por la Definición 1.4.1, $(x, y) \in f$ si y sólo si $(y, x) \in f^{-1}$. Así, $x \overset{f}{\mapsto} y$ si y sólo si $y \overset{f^{-1}}{\mapsto} x$. De donde obtenemos:

Definición 2.3.3

$$y = f(x) \textbf{ si y sólo si } x = f^{-1}(y).$$

Los siguientes dos teoremas nos dan una condición necesaria y una suficiente para que una función sea invertible.

Teorema 2.3.2 Si $f : A \to B$ es una función biyectiva entonces $f^{-1} : B \to A$ es una función biyectiva.

Prueba: Por el teorema 2.2.1, *dom* $f = A$, y por la definición 2.2.4, *ran* $f = B$; así por el teorema 1.4.2, *dom* $f^{-1} = B$ y *ran* $f^{-1} = A$. Ahora probemos que f^{-1} satisface **F2**:

$$\begin{aligned} (y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1} &\Rightarrow (x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f, \text{ por 1.4.1} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \text{ por 2.2.3.} \end{aligned}$$

Así, por el teorema 2.2.1, $f^{-1} : B \to A$ es una función.

Procedemos a probar que f^{-1} satisface **INJ**:

$$\begin{aligned}(y_1, x) \in f^{-1} \wedge (y_2, x) \in f^{-1} &\Rightarrow (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f, \text{ por } 1.4.1\\ &\Rightarrow y_1 = y_2, \text{ por } 2.2.1.\end{aligned}$$

Finalmente, f^{-1} satisface **SURJ** ya que $ran\ f^{-1} = A$. □

Teorema 2.3.3 Si $f : A \to B$ es invertible entonces $f : A \to B$ es biyectiva.

Prueba: Sea $f : A \to B$ invertible; esto es, sea $f^{-1} : B \to A$ una función. Por el teorema 2.2.1, $dom\ f^{-1} = B$, así por el teorema 1.4.2.2, $ran\ f = B$, así, $f : A \to B$ es sobreyectiva. Ahora

$$\begin{aligned}(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f &\Rightarrow (y, x_1) \in f^{-1} \wedge (y, x_2) \in f^{-1}, \text{ por } 1.4.1\\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \text{ por } \mathbf{F2} \text{ aplicada a } f^{-1}.\end{aligned}$$

Así $f : A \to B$ es también inyectiva, y por tanto biyectiva. □

Los teoremas 2.3.2 y 2.3.3 se pueden resumir como sigue:

$f : A \to B$ **es invertible si y sólo si es biyectiva; aún más, si** $f : A \to B$ **es invertible, entonces** $f^{-1} : B \to A$ **es biyectiva.**

Los dos teoremas siguientes dan otra caracterización útil de funciones invertibles.

Teorema 2.3.4 Sea $f : A \to B$ una función invertible entonces:
I) $f^{-1} \circ f = I_A$. II) $f \circ f^{-1} = I_B$.

Prueba:

I) Sea $x \in A$ y sea $y = f(x)$; entonces por 2.3.3, $x = f^{-1}(y)$. Así

$$[f^{-1} \circ f](x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x = I_A(x);$$

esto se cumple para todo $x \in A$, así por el teorema 2.2.2, $f^{-1} \circ f = I_A$.

II) La prueba es análoga a la del inciso anterior y se deja como un ejercicio. □

Teorema 2.3.5 Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Si $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$ entonces $f : A \to B$ es biyectiva (y por tanto invertible) y $g = f^{-1}$.

Prueba:

I) Primero, probemos que $f : A \to B$ es inyectiva.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)), \text{ por } \mathbf{F2} \text{ (aplicada a } g) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2), \text{ por 2.3.1} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \text{ porque } g \circ f = I_A. \end{aligned}$$

II) Luego, probemos que $f : A \to B$ es sobreyectiva. Si $y \in B$ entonces $y = I_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$; en otras palabras, si y es cualquier elemento de B, entonces $y = f(x)$, donde $x = g(y) \in A$.

III) Finalmente, probemos que $g = f^{-1}$. Para empezar,

$$\begin{aligned} x = g(y) &\Rightarrow f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = I_B(y) = y \\ &\Rightarrow x = f^{-1}(y); \end{aligned}$$

reciprocamente,

$$\begin{aligned} x = f^{-1}(y) &\Rightarrow y = f(x) \\ &\Rightarrow g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = I_A(x)) = x. \end{aligned}$$

Así, $\forall y \in B, x = f^{-1}(y)$ ssi $x = g(y)$; esto es, $f^{-1}(y) = g(y)$; se sigue (por el teorema 2.2.2) que $f^{-1} = g$. □

Los teoremas 2.3.4 y 2.3.5 se pueden resumir como sigue:

$f : A \to B$ **es invertible si y sólo si existe una función** $g : B \to A$ **tal que** $g \circ f = I_A$ **y** $f \circ g = I_B$**. La función** g**, si existe, es la inversa de** f**.**

El siguiente teorema proporciona una caracterización importante de las funciones inyectivas.

Teorema 2.3.6 Sea $f : A \to B$ una función; $f : A \to B$ es inyectiva si y sólo si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$.

Prueba:

I) Suponga que existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$. Para probar que $f : A \to B$ es inyectiva, repetimos la parte I) de la prueba de 2.3.5.

II) Recíprocamente, suponga que $f : A \to B$ es inyectiva; sea $C = ran\ f$. Por el corolario 2.2.1, $f : A \to C$ es una función; $f : A \to C$ es sobreyectiva (porque $C = ran\ f$), así es biyectiva; así $f^{-1} : C \to A$ es una función. Si a es algún elemento fijo de A, sea $K_a : (B - C) \to A$ la función constante (ver ejemplo 2.2.2) el cual mapea todo elemento de $(B - C)$ sobre a. Si $g = f^{-1} \cup K_a$, entonces, por 2.2.4.I), $g : B \to A$ es una función. Finalmente, si $x \in A$, sea $y = f(x)$; entonces

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = g(f(x)) &= g(y), \text{ porque } y = f(x) \\ &= f^{-1}(y), \text{ por 2.2.4.III)} \\ &= x, \text{ porque } x = f^{-1}(y) \text{ por 2.3.3.} \end{aligned}$$

Así $\forall x \in A, (g \circ f)(x) = I_A$; se sigue por el teorema 2.2.2 que $g \circ f = I_A$. $\square$

Posteriormente probaremos un teorema compañero del teorema 2.3.6, el cual enuncia lo siguiente: $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si existe una función $g : B \to A$ tal que $f \circ g = I_B$. El teorema 2.3.6 y su compañero frecuentemente se parafrasean como sigue.

Sea $f : A \to B$ una función; $f : A \to B$ es inyectiva si y sólo si tiene una "inversa izquierda" y es sobreyectiva si y sólo si tiene una "inversa derecha".

Teorema 2.3.7 Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $g \circ f : A \to C$ son funciones, entonces lo siguiente se cumple:

I) Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.

II) Si f y g son sobreyectivas entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

III) Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Prueba:

I) Suponga que tanto f como g satisfacen **INJ**, entonces

$$g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2;$$

así $g \circ f$ satisface **INJ**.

II) Suponga que ambas f y g satisfacen **SURJ**, si $z \in C$, entonces $\exists y \in B \ni x = g(y)$; ya que $y \in B$, $\exists x \in A \ni y = f(x)$; así $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Consecuentemente, $g \circ f$ satisface **SURJ**.

III) Se sigue inmediatamente de I) y II). $\square$

Se sigue de 2.3.7.III) que **la composición de dos funciones invertibles es invertible.** Aún más, por el teorema 1.4.1.3, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ejercicio 2.3.1 Resuelva los siguientes problemas:

1. Sea $f : A \to B$ una función. Pruebe que $I_B \circ f = f$ y que $f \circ I_A = f$.

2. Suponga que $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones. Pruebe que si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva; pruebe que si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva. Concluya que si $g \circ f$ es biyectiva entoces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

3. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones. Suponga que $y = f(x)$ si y sólo si $x = g(y)$. Pruebe que f es invertible y que $g = f^{-1}$.

4. Sean $g : B \to C$ y $h : B \to C$ funciones. Suponga que $g \circ f = h \circ f$ para toda función $f : A \to B$. Pruebe que $g = h$.

5. Suponga que $g : A \to B$ y $h : A \to B$ son funciones. Sea C un conjunto con más de un elemento; suponga que $f \circ g = f \circ h$ para toda función $f : B \to C$. Pruebe que $g = h$.

6. Sea $f : B \to C$ una función. Pruebe que f es inyectiva si y sólo si para todo par de funciones $g : A \to B$ y $h : A \to B$, $(f \circ g = f \circ h) \Rightarrow g = h$.

7. Sea $f : A \to B$ una función. Pruebe que f es sobreyectiva si y sólo si para todo par de funciones $g : B \to C$ y $h : B \to C$, $(g \circ f = h \circ f) \Rightarrow g = h$.

Capítulo 3

Relaciones

3.1. Introducción

Intuitivamente, una relación binaria en una clase A es un enunciado $R(x, y)$ que es verdadero o falso para cada par ordenado (x, y) de elementos de A. Por ejemplo, la relación *"x divide a y"*, la cual escribimos como $D(x, y)$, es una relación en la clase $\mathbb{Z}$ de los enteros: $D(x, y)$ es verdadera para todo par de enteros (x, y) tal que y es un múltiplo de x; es falsa para cualquier otro par de enteros.

La *gráfica representante* de una relación en A es una gráfica $G \subseteq A \times A$ la cual consiste de todos los pares (x, y) tales que $R(x, y)$ es verdadera. Recíprocamente, si nos dan una gráfica arbitraria $G \subseteq A \times A$, entonces G define una relación en A, llamada la relación R tal que $R(x, y)$ es verdadera si y sólo si $(x, y) \in G$.

Así, como hicimos en el caso de funciones, podemos identificar relaciones con sus gráficas representantes. Desde este punto de vista el estudio de relaciones es parte de la teoría de conjuntos elemental.

3.2. Conceptos fundamentales y definiciones

Definición 3.2.1 Sea A una clase; por una *relación en A* entendemos una subclase arbitraria de $A \times A$.

Definición 3.2.2 Sea G una relación en A; entonces a G se le llama

reflexiva si $\forall x \in A, (x, x) \in G$.

simétrica si $(x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G$.

antisimétrica si $(x,y) \in G \wedge (y,x) \in G \Rightarrow x = y$.

transitiva si $(x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \Rightarrow (x,z) \in G$.

Definición 3.2.3 La *gráfica diagonal* I_A se define como la clase $\{(x,x) | x \in A\}$.

Es fácil ver que G es reflexiva si y sólo si $I_A \subseteq G$.

Existe una variedad de maneras alternativas interesantes y útiles de definir las nociones anteriores. Algunas se dan en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1 Sea G una relación en A.

I) G es simétrica si y sólo si $G = G^{-1}$.

II) G es antisimétrica si y sólo si $G \cap G^{-1} \subseteq I_A$.

III) G es transitiva si y sólo si $G \circ G \subseteq G$.

Prueba:

I) Suponga que G es simétrica. Entonces

$$(x,y) \in G \Leftrightarrow (y,x) \in G \Leftrightarrow (x,y) \in G^{-1};$$

así $G = G^{-1}$. Recíprocamente, suponga que $G = G^{-1}$, entonces

$$(x,y) \in G \Rightarrow (x,y) \in G^{-1} \Rightarrow (y,x) \in G.$$

II) Suponga que G es antisimétrica, entonces

$$\begin{aligned} (x,y) \in G \cap G^{-1} &\Rightarrow (x,y) \in G \wedge (x,y) \in G^{-1} \\ &\Rightarrow (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G^{-1} \\ &\Rightarrow x = y \\ &\Rightarrow (x,y) = (x,y) \in I_A. \end{aligned}$$

Recíprocamente, suponga que $G \cap G^{-1} \subseteq I_A$, entonces

$$\begin{aligned} (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G &\Rightarrow (x,y) \in G \wedge (x,y) \in G^{-1} \\ &\Rightarrow (x,y) \in G \cap G^{-1} \subseteq I_A \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

III) Suponga que G es transitiva, entonces

$$\begin{aligned}(x,y)\in G\circ G &\Rightarrow \exists z \ni (x,z)\in G\wedge (z,y)\in G\\ &\Rightarrow (x,y)\in G.\end{aligned}$$

Así $G\circ G\subseteq G$. Recíprocamete, suponga que $G\circ G\subseteq G$, entonces

$$(x,y)\in G\wedge (y,z)\in G\Rightarrow (x,z)\in G\circ G\subseteq G.$$

$\square$

Definición 3.2.4 Una relación es llamada una *relación de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Una relación es llamada una *relación de orden* si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 3.2.5 Sea G una relación en A. G es llamada:

irreflexiva si $\forall x\in A, (x,x)\notin G$.

asimétrica si $(x,y)\in G\Rightarrow (y,x)\notin G$.

intransitiva si $(x,y)\in G\wedge (y,z)\in G\Rightarrow (x,z)\notin G$.

Ejemplo 3.2.1 Sea $\mathbb{Z}$ que designa al conjunto de los números enteros; la relación de igualdad en $\mathbb{Z}$ es reflexiva, simétrica y transitiva; así, es una relación de equivalencia.

Ejemplo 3.2.2 Sea $\mathbb{Z}$ que designa al conjunto de los números enteros; la relación $\leq$ ("menor o igual a") es reflexiva, antisimétrica y transitiva; así, es una relación de orden.

Ejemplo 3.2.3 Sea $\mathbb{Z}$ que designa al conjunto de los números enteros; la relación $<$ ("menor estrictamente que") no es una relación de orden: es irreflexiva, asimétrica y transitiva; a tal relación se le llama una relación de *orden estricto*.

Ejercicio 3.2.1 Proceda como se indica en cada inciso.

1. Cada una de las siguientes gráficas describe una relación en el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros. Enuncie, para cada relación, si tiene cada una de las siguientes propiedades: reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, irreflexiva, asimétrica e intransitiva. Determine cuando es una relación de equivalencia, una relación de orden o ninguna. Pruebe sus respuestas en cada caso.

   a) $G = \{(x, y) | x + y < 3\}$.
   b) $G = \{(x, y) | x \text{ divide a } y\}$.
   c) $G = \{(x, y) | x \text{ y } y \text{ son primos relativos}\}$.
   d) $G = \{(x, y) | x + y \text{ es un número par}\}$.
   e) $G = \{(x, y) | x = y \vee x = -y\}$.
   f) $G = \{(x, y) | x + y \text{ es par y } x \text{ es un múltiplo de } y\}$.
   g) $G = \{(x, y) | x = y + 1\}$.

2. Sea G una relación en A; pruebe cada una de las siguientes:

   a) G es irreflexiva si y sólo si $G \cap I_A = \varnothing$.
   b) G es asimétrica si y sólo si $G \cap G^{-1} = \varnothing$.
   c) G es intransitiva si y sólo si $(G \circ G) \cap G = \varnothing$.

3. Muestre que si G es una relación de equivalencia en A, entonces $G \circ G = G$.

4. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia indexada de relaciones de equivalencia en A. Muestre que $\bigcap_{i \in I} G_i$ es una relación de equivalencia en A.

5. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia indexada de relaciones de orden en A. Muestre que $\bigcap_{i \in I} G_i$ es una relación de orden en A.

6. Sea H una relación reflexiva en A. Pruebe que para cualquier relación G en A, $G \subseteq H \circ G$ y $G \subseteq G \circ H$.

7. Sean G y H relaciones en A; suponga que G es reflexiva y H es reflexiva y transitiva. Muestre que $G \subseteq H$ si y sólo si $G \circ H = H$. (En particular, esto se cumple si G y H son relaciones de equivalencia.)

8. Muestre que la inversa de una relación de orden en A es una relación de orden en A.

9. Sea G una relación en A. Muestre que G es una relación de orden si y sólo si $G \cap G^{-1} = I_A$ y $G \circ G = G$.

10. Sean G y H relaciones de equivalencia en A. Muestre que $G \circ H$ es una relación de equivalencia en A si y sólo si $G \circ H = H \circ G$.

11. Sean G y H relaciones de equivalencia en A. Pruebe que $G \cup H$ es una relación de equivalencia si y sólo si $G \circ H \subseteq G \cup H$ y $H \circ G \subseteq G \cup H$.

12. Sea G una relación de equivalencia en A. Pruebe que si H y J son relaciones arbitrarias en A, entonces $G \subseteq H \wedge G \subseteq J \Rightarrow G \subseteq H \circ J$.

3.3. Relaciones de equivalencia y particiones

En el resto de este capítulo nos ocuparemos con relaciones de equivalencia en conjuntos. Los conceptos que estamos por introducir surgen naturalmente en términos de conjuntos, peor no pueden extenderse a clases propias; para entender porque no, el lector debe revisar nuestra discusión de la sección 1.6.

Brevemente, si A es un conjunto y $P(X)$ es una propiedad, entonces por la Observación 1.6.2 es legítimo formar el conjunto de todos los subconjuntos $X \subseteq A$ que satisfacen $P(X)$. No obstante, si A fuera una clase arbitraria, no sería permisible formar la "clase de todas las subclases de A que satisfacen $P(X)$".

Esta restricción nos obliga a confinar la siguiente discusión a conjuntos. Intuitivamente, esto no debe inquietar demasiado al lector, ya que un conjunto es casi lo mismo que una clase: un conjunto es cualquier clase excepto una "excesivamente grande".

Definición 3.3.1 Sea A un conjunto; por una *partición* de A nos referimos a una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos no vacíos de A con las siguientes propiedades:

P1. $\forall i, j \in I, A_i \cap A_j = \varnothing$ o $A_i = A_j$.

P2. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Intuitivamente, una partición es una familia de subconjuntos de A los cuales son disjuntos uno del otro, y cuya unión es todo A. Los subconjuntos son llamados los *miembros* de la partición. Se acostumbra permitir a un miembro dado de la partición ser designado por más de un índice; esto es, podemos tener $A_i = A_j$, cuando $i \neq j$. Así la condición de que dos miembros *distintos* son disjuntos está expresada correctamente por **P1**.

La propiedad **P1** enuncia que cualesquiera dos miembros A_i y A_j o son disjuntos o son iguales; esto es, o no tienen elementos en común o tienen todos sus elmentos en común; en otras palabras, si ellos tienen tanto como un elemento en común, ellos tienen todos sus elementos en común. Así, **P1** también se puede enunciar como sigue:

P1°. Si $\exists x \in A_i \cap A_j$, entonces $A_i = A_j$.

P2 se puede remplazar por la condición más simple

P2′. $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Ya que, independientemente de la condición **P2**, hemos establecido que cada A_i es un subconjunto de A; así, por el teorema 1.5.1.1 $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A$. Consecuentemente, es suficiente enunciar **P2′** para tener que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Es conveniente escribir **P2′** en la forma

P2°. Si $x \in A$, entonces $x \in A_i$ para algún $i \in I$.

Brevemente, entonces, una partición de A es una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos no vacíos de A tal que

P1°. Si $\exists x \in A_i \cap A_j$, entonces $A_i = A_j$ y

P2°. Si $x \in A$, entonces $x \in A_i$ para algún $i \in I$.

En los ejercicios al final de esta sección se dan ejemplos de particiones.

Los siguientes resultados enuncian la conexión entre relaciones de equivalencia en A y particiones de A. Ellos son de gran importancia en muchas ramas de la matemática.

Sea G una relación de equivalencia en A; algunas veces escribimos $x \underset{G}{\sim} y$ en vez de $(x, y) \in G$, y decimos que "*x es equivalente a y módulo G*"; cuando no existe peligro de ambigüedad, escribimos simplemente $x \sim y$ y decimos que "*x es equivalente a y*". Note que como G es una relación de equivalencia en A, tenemos

i) $x \sim x$, $\forall x \in A$.

II) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

III) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Definición 3.3.2 Sea A un conjunto y sea G una relación de equivalencia en A. Si $x \in A$, entonces la *clase de equivalencia de x módulo G* es el conjunto G_x definido como sigue:

$$G_x = \{y \in A | (y, x) \in G\} = \{y \in A | y \underset{G}{\sim} x\}.$$

En otras palabras, G_x es el conjunto de todos los elementos de A que son equivalentes a x. En la literatura matemática, G_x se denota también por los símbolos A_x, $[x]$ y x/G.

Lema 3.3.1 Sea G una relación de equivalencia en A. Entonces

$$x \sim y \text{ si y sólo si } G_x = G_y.$$

Prueba:

I) Suponga que $x \sim y$; tenemos

$$\begin{aligned} z \in G_x \Rightarrow z \sim x \quad &\Rightarrow \quad z \sim y \text{ porque asumimos que } x \sim y \\ &\Rightarrow \quad z \in G_y. \end{aligned}$$

Hemos mostrado que $G_x \subseteq G_y$; análogamente, $G_y \subseteq G_x$; así $G_x = G_y$.

II) Suponga $G_x = G_y$; por la propiedad reflexiva, $x \sim x$, así $x \in G_x$; pero $G_x = G_y$; así $x \in G_y$, esto es $x \sim y$. $\square$

Teorema 3.3.1 Sea A un conjunto, sea G una relación de equivalencia en A, y sea $\{G_x\}_{x \in A}$ la familia de todas las clases de equivalencia módulo G. Entonces

$$\{G_x\}_{x \in A} \text{ es una partición de } A.$$

Prueba: Por definición, cada G_x es un subconjunto de A; es no vacío ya que $x \sim x$, por lo tanto $x \in G_x$. Resta probar que **P1°** y **P2°** se cumplen.

P1° $z \in G_x \cap G_y \Rightarrow z \in G_x$ y $z \in G_y \Rightarrow z \sim x$ y $z \sim y \Rightarrow x \sim z$ y $z \sim y \Rightarrow x \sim y \Rightarrow G_x = G_y$ (la última implicación se sigue del lema 3.3.1).

P2° Si $x \in A$, entonces por la propiedad reflexiva $x \sim x$, así $x \in G_x$. $\square$

Si G es una relación de equivalencia en A y $\{G_x\}_{x\in A}$ es la familia de todas las clases de equivalencia módulo G, entonces $\{G_x\}_{x\in A}$ es referida como la *partición inducida por* G, o la partición correspondiente a G.

Teorema 3.3.2 Sea A un conjunto, sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de A, y sea G el conjunto de pares (x, y) de elementos de A tales que x y y están en el mismo miembro de la partición; esto es,

$$G = \{(x, y)|x \in A_i \wedge y \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

Entonces G es una relación en A y $\{A_i\}_{i\in I}$ es la partición inducida por G. A G se le llama la *relación de equivalencia correspondiente a* $\{A_i\}_{i\in I}$.

Prueba:

G **es reflexiva:** $x \in A \Rightarrow x \in A_i$ para algún $i \in I$ lo cual implica que $x \in A_i \wedge x \in A_i \Rightarrow (x, x) \in G$.

G **es simétrica:** $(x, y) \in G \Rightarrow x \in A_i \wedge y \in A_i$ lo cual implica que $y \in A_i \wedge x \in A_i \Rightarrow (y, x) \in G$.

G **es transitiva:** $(x, y) \in G$ y $(y, z) \in G$ implican que $x \in A_i \wedge y \in A_i$ y $y \in A_j \wedge z \in A_j$ lo cual implica que $A_i = A_j$ (porque $y \in A_i \cap A_j$) lo cual implica que $x \in A_i \wedge z \in A_i$ lo cual implica que $(x, z) \in G$. Finalmente, cada A_i es una clase de equivalencia módulo G; ya que si $x \in A_i$, entonces $y \in A_i \Leftrightarrow (y, x) \in G \Leftrightarrow y \in G_x$; así $A_i = G_x$. $\square$

Los dos teoremas aclaran que toda relación de equivalencia en A corresponde únicamente a una partición de A, y recíprocamente. Una vez más: si damos una partición de A, la *relación de equivalencia correspondiente* es la relación que le llama a los elementos x y y "equivalentes" si ellos están en el mismo miembro de la partición.

Viendo el otro lado de la moneda, si damos una relación de equivalencia en A, la *partición correspondiente* es aquella que pone a los elementos x y

y en el mismo miembro de la partición si y sólo si ellos son equivalentes. El lector debe notar que G es la relación de equivalencia correspondiente a $\{A_i\}_{i\in I}$ si y sólo si $\{A_i\}_{i\in I}$ es la partición correspondiente a G.

Ejemplo 3.3.1 Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$; sea $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$ y $A_3 = \{e\}$. Sea $G = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$. Es fácil ver que $\{A_1, A_2, A_3\}$ es una partición de A; G es la relación de equivalencia correspondiente a $\{A_1, A_2, A_3\}$ y $\{A_1, A_2, A_3\}$ es la partición correspondiente a G. Se debe notar que $A_1 = G_a = G_b$, $A_2 = G_c = G_d$ y $A_3 = G_e$.

Si G es una relación de equivalencia en el conjunto A, entonces al conjunto de clases de equivalencia módulo G se le llama el *conjunto cociente de A* entre G, se acostumbra denotarlo mediante A/G. Así, en el ejemplo anterior, A/G es el conjunto de tres elementos $\{G_a, G_c, G_e\}$. El concepto de conjunto cociente juega un rol vital en muchas partes de la matemática avanzada.

Ejercicio 3.3.1 Proceda como se pide.

1. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Para cada entero n, sea $B_n = \{m \in \mathbb{Z} | \exists q \ni m = n + 5q\}$. Pruebe que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una partición de $\mathbb{Z}$.

2. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. En cada uno de los siguientes, pruebe que $\{B_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ es una partición de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Describa geométricamente a los miembros de cada partición. Encuentre la relación de equivalencia correspondiente a cada partición.

   a) $B_r = \{(x, y)|y = x + r\}$ para cada $r \in \mathbb{R}$.
   b) $B_r = \{(x, y)|x^2 + y^2 = r\}$ para cada $r \in \mathbb{R}$.

3. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Pruebe que cada una de las siguientes es una relación de equivalencia en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

   a) $G = \{[(a, b), (c, d)]|a^2 + b^2 = c^2 + d^2\}$.
   b) $H = \{[(a, b), (c, d)]|b - a = d - c\}$.
   c) $J = \{[(a, b), (c, d)]|a + b = c + d\}$.

   Encuentre la partición correspondiente a cada una de las relaciones de equivalencia y describa geométricamente a los miembros de estas particiones. [Consejo para b): si $b-a = d-c = k$, note que $[(a, b), (c, d)] \in H$

si y sólo si tanto (a, b) como (c, d) satisfacen la ecuación $y = x + k$. Consejo para c): si $a + b = c + d = k$, note que $[(a, b), (c, d)] \in J$ si y sólo si tanto (a, b) como (c, d) satisfacen la ecuación $y = -x + k$.]

4. Si H y J son las relaciones de equivalencia del ejercicio 3, describa la relación de equivalencia $H \cap J$. Describa las clases de equivalencia módulo $H \cap J$.

5. Sean H y J las relaciones de equivalencia del ejercicio 3. Pruebe que $H \circ J = J \circ H$; concluya que $H \circ J$ es una relación de equivalencia, y describa las clases de equivalencia módulo $H \circ J$. [Consejo: Vea el ejercicio 10 del conjunto de ejercicios 3.2.1.]