Demostrar tautologías sin tablas de verdad Matemáticas discretas Otoño 2012 Sección 102

José de Jesús Lavalle Martínez

8 de septiembre de 2012

Resumen

Este documento presenta el código LaTeX que decora una proposición para demostrar que es una tautologia.

1. Definiciones utilizadas

Definición 1.1 (Subclase)**.** *Sean A y B clases; definimos $A \subseteq B$ para significar que todo elemento de A es un elemento de B. En símbolos:*

$$A \subseteq B \text{ ssi } x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Definición 1.2 (Unión de clases)**.** *Sean A y B clases; la unión de A y B se define como la clase de todos los elementos que pertenecen a A, o a B, o a ambas A y B. En símbolos,*

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Así, $x \in A \cup B$ si y sólo si $x \in A \vee x \in B$.

2. Ejemplos

Ejercicio 2.1. *Suponga que $A \subseteq B$ y que $C \subseteq D$; pruebe que $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$.*

Prueba 2.1. *Por la definición de subclase (1.1) tenemos como hipótesis $x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in D$. Por demostrar que (usando la definición 1.1) $x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)$, lo que es igual a (por la definición 1.2) $(x \in A \vee x \in C) \Rightarrow (x \in B \vee x \in D)$. Es decir, tenemos que demostrar que*

$$(x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in D) \Rightarrow ((x \in A \vee x \in C) \Rightarrow (x \in B \vee x \in D)) \tag{1}$$

es una tautología.

*La prueba la haremos por contradicción, es decir, suponemos que el antecedente $(x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in D)$ es verdadero y que el consecuente $(x \in A \vee x \in C) \Rightarrow (x \in B \vee x \in D)$ es **falso**.*

La última suposición nos lleva a que $(x \in A \vee x \in C)$ debe ser verdadera y que $(x \in B \vee x \in D)$ debe ser falsa. Con lo cual tenemos que tanto $x \in B$ como $x \in D$ son falsas.

Para que el antecedente sea verdadero se requiere que $x \in A \Rightarrow x \in B$ sea verdadera y que $x \in C \Rightarrow x \in D$ también sea verdadera. Como habíamos llegado (en el párrafo anterios) a que $x \in B$ y $x \in D$ son falsas, debemos de tener que $x \in A$ y $x \in C$ también son falsas.

*Como $x \in A$ y $x \in C$ son falsas entonces $x \in A \vee x \in C$ es falsa, lo que nos llevaría a que $(x \in A \vee x \in C) \Rightarrow (x \in B \vee x \in D)$ es **verdadera**, lo cual es una contradicción ya que supusimos que era falsa. Por lo tanto no es posible que la proposición (1) sea falsa, es decir, es una tautología.* $\square$

Podemos expresar el razonamiento anterior "decorando"la proposición (1) de la siguiente manera:

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{x \in A}_{F} \Rightarrow \underbrace{x \in B}_{F} \wedge \underbrace{x \in C}_{F} \Rightarrow \underbrace{x \in D}_{F})}_{V} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(x \in A \vee x \in C)}_{\mathbf{V,F}} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{x \in B}_{F} \vee \underbrace{x \in D}_{F})}_{F})}_{\mathbf{F,V}}}_{\mathbf{F,V}} \tag{2}$$

El primer valor de verdad, en las subproposiciones marcadas con doble valor de verdad en la proposición decorada (2), es el que se asume inicialmente, por consiguiente, el segundo valor de verdad es el que resulta al ir analizando cada sub-proposición.

Una vez que se ha dominado esta manera de decorar proposiciones, las pruebas se pueden escribir de la siguiente manera.

Ejercicio 2.2. *Suponga que $A \subseteq B$ y que $C \subseteq D$; pruebe que $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$.*

Prueba 2.2. *Por la definición de subclase (1.1) tenemos como hipótesis $x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in D$. Por demostrar que (usando la definición 1.1) $x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)$, lo que es igual a (por la definición 1.2) $(x \in A \vee x \in C) \Rightarrow (x \in B \vee x \in D)$. Es decir, tenemos que demostrar que*

$$(x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in D) \Rightarrow ((x \in A \vee x \in C) \Rightarrow (x \in B \vee x \in D))$$

es una tautología.

Demostramos por contradicción que es una tautología de la siguiente manera:

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{x \in A}_{F} \Rightarrow \underbrace{x \in B}_{F} \wedge \underbrace{x \in C}_{F} \Rightarrow \underbrace{x \in D}_{F})}_{V} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{((x \in A \vee x \in C)}_{\textbf{V,F}} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{x \in B}_{F} \vee \underbrace{x \in D}_{F}))}_{F})}_{\textbf{F,V}}}_{\textbf{F,V}}$$

$\square$

El código LaTeX de la proposición decorada es:

```
\begin{equation*}
\underbrace{\underbrace{(\underbrace{x \in A}_{F}
\ra \underbrace{x \in B}_{F} \wedge
\underbrace{x \in C}_{F} \ra
\underbrace{x \in D}_{F})}_{V} \ra
\underbrace{\underbrace{((x \in A \vee x \in C)}_{\textbf{V,F}}
\ra \underbrace{(\underbrace{x \in B}_{F} \vee
\underbrace{x \in D}_{F}))}_{F})}_{\textbf{F,V}}}_{\textbf{F,V}}
\end{equation*}
```