Solución al primer examen parcial programado de matemáticas discretas
FCC BUAP

José de Jesús Lavalle Martínez

Primavera de 2007

1. Pruebe que si $A = B$ entonces $A' = B'$.

   Prueba:

$$
\begin{aligned}
A = B \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \\
&\qquad \text{por definición de igualdad de clases,} \\
&\Leftrightarrow \quad x \notin B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin A \Rightarrow x \notin B \\
&\qquad \text{ya que } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \text{ es una tautología,} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in B' \Rightarrow x \in A' \wedge x \in A' \Rightarrow x \in B' \\
&\qquad \text{por definición del complemento de una clase,} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in A' \Rightarrow x \in B' \wedge x \in B' \Rightarrow x \in A' \\
&\qquad \text{por la conmutatividad de la conjunción,} \\
&\Leftrightarrow \quad A' = B' \\
&\qquad \text{por definición de igualdad de clases.}
\end{aligned}
$$

2. Pruebe que si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

   Prueba:

$$
\begin{aligned}
A \subset B \ y \ B \subset C \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \Rightarrow x \in B \wedge x \in B \Rightarrow x \in C \\
&\qquad \text{por definición de subclase,} \\
&\Rightarrow \quad x \in A \Rightarrow x \in C \text{ ya que es una tautología} \\
&\qquad (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r), \\
&\Leftrightarrow \quad A \subset C \\
&\qquad \text{por definición de subclase.}
\end{aligned}
$$

3. Usando álgebra de clases demuestre que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

   Prueba:

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup C &= C \cup (A \cap B) \\
&\quad \text{ya que } A \cup B = B \cup A, \\
&= (C \cup A) \cap (C \cup B) \\
&\quad \text{ya que } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\
&= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
&\quad \text{ya que } A \cup B = B \cup A.
\end{aligned}$$

4. Usando álgebra de clases demuestre que $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.

   Prueba:

$$\begin{aligned}
A \cap (B - C) &= A \cap (B \cap C') \\
&\quad \text{ya que } A - B = A \cap B', \\
&= (A \cap B) \cap C' \\
&\quad \text{ya que } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \\
&= (A \cap B) - C \\
&\quad \text{ya que } A - B = A \cap B'.
\end{aligned}$$

5. Pruebe que $A \times (B - D) = (A \times B) - (A \times D)$.

   Prueba:

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B - D) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B - D) \\
&\quad \text{por la definición de producto cartesiano,} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin D \\
&\quad \text{por la definición de diferencia,} \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin D \\
&\quad \text{ya que es una tautología } p \Rightarrow (p \wedge p), \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in A \wedge y \notin D \\
&\quad \text{por la conmutatividad de la conjunción,} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin A \times D \\
&\quad \text{por la definición de producto cartesiano,} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) - (A \times D) \\
&\quad \text{por la definición de diferencia.}
\end{aligned}$$

6. Pruebe que $(A \times A) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.

   Prueba:

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in (A \times A) \cap (B \times C) \\
\Leftrightarrow\ & (x,y) \in (A \times A) \wedge (x,y) \in (B \times C) \\
& \text{por la definición de intersección,} \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge y \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \\
& \text{por la definición de producto cartesiano,} \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge x \in B \wedge y \in A \wedge y \in C \\
& \text{por la conmutatividad de la conjunción,} \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \cap B \wedge y \in A \cap C \\
& \text{por la definición de intersección,} \\
\Leftrightarrow\ & (x,y) \in (A \cap B) \times (A \cap C) \\
& \text{por la definición de producto cartesiano.}
\end{aligned}$$

7. Sean G, H y J gráficas, demuestre que $(H \cup J) \circ G = (H \circ G) \cup (J \circ G)$.

   Prueba:

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in (H \cup J) \circ G \\
\Leftrightarrow\ & \exists z \ni (x,z) \in G \wedge (z,y) \in (H \cup J) \\
& \text{por la definición de composición,} \\
\Leftrightarrow\ & \exists z \ni (x,z) \in G \wedge ((z,y) \in H \vee (z,y) \in J) \\
& \text{por la definición de unión,} \\
\Leftrightarrow\ & \exists z \ni ((x,z) \in G \wedge (z,y) \in H) \vee ((x,z) \in G \wedge (z,y) \in J) \\
& \text{ya que es una tautología } p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \\
\Leftrightarrow\ & (x,y) \in (H \circ G) \vee (x,y) \in (J \circ G) \\
& \text{por la definición de composición,} \\
\Leftrightarrow\ & (x,y) \in (H \circ G) \cup (J \circ G) \\
& \text{por la definición de unión.}
\end{aligned}$$

8. Sean G y H gráficas, demuestre que $(G \cap H)^{-1} = G^{-1} \cap H^{-1}$.

   Prueba:

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in (G \cap H)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & (y,x) \in (G \cap H) \text{ por la definición de inversa,} \\
\Leftrightarrow\ & (y,x) \in G \wedge (y,x) \in H \text{ por la definición de intersección,} \\
\Leftrightarrow\ & (x,y) \in G^{-1} \wedge (x,y) \in H^{-1} \text{ por la definición de inversa,} \\
\Leftrightarrow\ & (x,y) \in G^{-1} \cap H^{-1} \text{ por la definición de intersección.}
\end{aligned}$$