

Lista de ejercicios sobre funciones

José de Jesús Lavalle Martínez

Primavera de 2007

Ejercicio 1 Resuelva los siguientes ejercicios:

1. Pruebe que las funciones identidad, constante, inclusión, característica y la restricción de una función califican como funciones de acuerdo a la definición de función, en otras palabras que cumplen **F1** y **F2**.
2. Si $f : A \rightarrow B$ es un función inyectiva y $C \subseteq A$ entonces $f|_C : C \rightarrow B$ es un función inyectiva.
3. Sea A una clase y sea $f = \{(x, (x, x)) | x \in A\}$. Muestre que f es una función biyectiva de A en I_A .
4. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow B$ funciones. Pruebe que si $f \subseteq g$ entonces $f = g$.
5. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ funciones. El *producto* de f y g es la función definida como sigue:

$$[f \cdot g](x, y) = (f(x), g(y)) \text{ para todo } (x, y) \in A \times C.$$

Pruebe que $f \cdot g$ es una función de $A \times C$ en $B \times D$. Pruebe que si f y g son inyectivas entonces $f \cdot g$ es inyectiva y que si f y g son sobreyectivas entonces $f \cdot g$ es sobreyectiva. Pruebe que $\text{ran } [f \cdot g] = (\text{ran } f) \times (\text{ran } g)$.

6. Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Pruebe que $I_B \circ f = f$ y que $f \circ I_A = f$.
7. Suponga que $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son funciones. Pruebe que si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva; pruebe que si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva. Concluya que si $g \circ f$ es biyectiva entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.
8. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ funciones. Suponga que $y = f(x)$ si y sólo si $x = g(y)$. Pruebe que f es invertible y que $g = f^{-1}$.
9. Sean $g : B \rightarrow C$ y $h : B \rightarrow C$ funciones. Suponga que $g \circ f = h \circ f$ para toda función $f : A \rightarrow B$. Pruebe que $g = h$.
10. Suponga que $g : A \rightarrow B$ y $h : A \rightarrow B$ son funciones. Sea C un conjunto con más de un elemento; suponga que $f \circ g = f \circ h$ para toda función $f : B \rightarrow C$. Pruebe que $g = h$.

11. Sea $f : B \rightarrow C$ una función. Pruebe que f es inyectiva si y sólo si para todo par de funciones $g : A \rightarrow B$ y $h : A \rightarrow B$, $(f \circ g = f \circ h) \Rightarrow g = h$.
12. Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Pruebe que f es sobreyectiva si y sólo si para todo par de funciones $g : B \rightarrow C$ y $h : B \rightarrow C$, $(g \circ f = h \circ f) \Rightarrow g = h$.