Definiciones Inductivas
Lógica Matemática

José de Jesús Lavalle Martínez

24 de junio de 2011

Resumen

Este documento es una traducción de partes de la sección *2.3 Inductive Definitions* del libro *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving* de Jean Gallier[1].

1. Definiciones inductivas

La mayoría de los objetos usados en lógica o ciencias de la computación son definidos inductivamente. Lo cual significa que frecuentemente definimos un conjunto S de objetos como:

El conjunto más pequeño de objetos que contienen a un conjunto dado X de átomos y que es cerrado bajo un conjunto dado F de constructores.

El propósito de esta sección es definir rigurosamente el significado de la oración anterior.

1.1. Cerraduras inductivas

Definición 1.1 (Conjunto inductivo)**.** Sean A un conjunto, $X \subset A$ un subconjunto de A y F un conjunto de funciones $f : A^n \to A$, cada función con una aridad $n > 0$. Decimos que un *conjunto* Y es *inductivo sobre* X si y sólo si (ssi) X es un subconjunto de Y y Y es *cerrado bajo las funciones en* F, esto es: para toda función $f : A^n \to A$ en F y para todos $y_1, \cdots, y_n \in Y, f(y_1, \cdots, y_n)$ está también en Y. Claramente, A mismo es inductivo sobre X.

[1] `http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/logic.html`

Definición 1.2 (Cerradura inductiva)**.** La intersección de todos los conjuntos inductivos sobre X es también cerrado bajo F y se le llama *cerradura inductiva de* X *bajo* F. Denotaremos la cerradura inductiva de X mediante X^+.

Si X no es vacío, ya que todo conjunto inductivo sobre X contiene a X y existe al menos un conjunto inductivo sobre X (llamado A), entonces X^+ no es vacío. Note que X^+ es el *menor conjunto inductivo* que contiene a X.

A la anterior definición le podriamos llamar una definición de *arriba-hacia-abajo*. Frecuentemente, X^+ es llamado el menor conjunto que contiene a X y es cerrado bajo F.

Existe una manera de *abajo-hacia-arriba* y más constructiva de caracterizar a X^+. La secuencia de conjuntos $(X_i)_{i \geq 0}$ se define por inducción como sigue:

1. $X_0 = X$ y

2. $X_{i+1} = X_i \cup \{f(x_1, \cdots, x_n) | f \in F, x_1, \cdots, x_n \in X_i, n = r(f)\}$.

Es claro que $X_i \subseteq X_{i+1}$ para todo $i \geq 0$. Sea

$$X_+ = \bigcup_{i \geq 0} X_i$$

Lema 1.3. $X^+ = X_+$

Demostración. Primero mostraremos que X_+ es inductivo sobre X. Ya que $X_0 = X$, X_+ contiene a X. Luego, mostramos que X_+ es cerrado bajo F. Para todo $f \in F$ de aridad $n > 0$ y para todos los $x_1, \cdots, x_n \in X_+$, por definición de X_+ existe algún i tal que todos los $x_1, \cdots, x_n$ están en X_i y ya que $f(x_1, \cdots, x_n) \in X_{i+1}$ (por definición), $f(x_1, \cdots, x_n) \in X_+$. Ya que X_+ es inductivo sobre X y X^+ es el menor conjunto inductivo que contiene a X, X^+ es un subconjunto de X_+.

Para probar que X_+ es un subconjunto de X^+, probaremos por inducción que X_i es un subconjunto de X^+ para todo $i \geq 0$. Pero esto es obvio ya que X^+ es cerrado bajo F. Así, hemos mostrado que $X^+ = X_+$. $\square$

Lema 1.4 (Principio de inducción para conjuntos inductivos)**.** Si X_+ es la cerradura inductiva de X bajo F, para todo subconjunto Y de X_+, si Y (es inductivo) contiene a X y es cerrado bajo F, entonces $Y = X_+$.

Demostración. Por hipótesis, Y es inductivo sobre X. Por el lema 1.3, $X_+ = X^+$ el cual es el menor conjunto inductivo que contiene a X. Así, $X_+ \subset Y$. Pero por hipótesis, $Y \subset X_+$, así $Y = X_+$. $\square$

1.2. Conjuntos generados libremente

Frecuentemente es necesario definir funciones recursivamente sobre una cerradura inductiva. Por ejemplo, una vez que hemos definido una cerradura inductiva es usual que les demos algún significado a los objetos ahí contenidos, pero queremos que el significado no sea ambiguo.

Para dar una explicación intuititva de lo que significa generado libremente, observe que la definición de abajo-hacia-arriba de X_+ sugiere que cada elemento de X_+ puede representarse mediante un conjunto de árboles. En verdad, cada átomo, esto es, cada elemento $x \in X$, se representa mediante el árbol de un nodo etiquetado con ese elemento, y cada elemento $a = f(x_1, \cdots, x_n) \in X_{k+1}$ se representa mediante todos los árboles de la forma $f(t_1, \cdots, t_n)$, donde cada subárbol t_i es cualquiera de los árboles que representan a x_i. Cada elemento de X_+ se representa usualmente mediante diferentes árboles.

A grandes rasgos, una cerradura inductiva X_+ está generada libremente mediante X y F si todo elemento $a \in X_+$ se representa mediante un único árbol.

Técnicamente la definición de generación libre es como sigue.

Definición 1.5 (Cerradura inductiva generada libremente)**.** Sean A un conjunto, $X \subset A$, F un conjunto de funciones sobre A, y X_+ la cerradura inductiva de X bajo F. Decimos que X_+ *está generada libremente mediante X y F* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La restricción de toda función $f : A^m \to A$ en F a X_+^m es inyectiva.
2. Para todo $f : A^m \to A, g : A^n \to A$ en F, $f(X_+^m)$ es disjunta de $g(X_+^n)$ siempre que $f \neq g$.
3. Para toda $f : A^m \to A$ en F y toda $(x_1, \cdots, x_m) \in X_+^m$, $f(x_1, \cdots, x_m) \notin X$.

Sea $X_{-1} = \emptyset$. Ahora mostramos el siguiente lema.

Lema 1.6. Si X_+ está generada libremente mediante X y F, entonces para todo $i \geq 0$, $X_{i+1} \neq X_i$ y $f(x_1, \cdots, x_n) \notin X_i$, para toda $f \in F$ de aridad n y toda $(x_1, \cdots, x_n) \in X_i^n - X_{i-1}^n$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre $i \geq 0$. Esto es obvio para $i = 0$ ya que $X_{-1} = \emptyset$, $X_0 = X$ y por la condición 3.

Para $i > 0$, probamos por inducción sobre $k, 0 \leq k \leq i$. Si $(x_1, \cdots, x_n) \in X_i^n - X_{i-1}^n$ entonces $f(x_1, \cdots, x_n) \notin X_k$.

Para $k = 0$, se sigue de la condición 3.

Ahora, asuma que si $(x_1, \cdots, x_n) \in X_i^n - X_{i-1}^n$ entonces $f(x_1, \cdots, x_n) \notin X_k$, para $0 \leq k \leq i - 1$. Si $f(x_1, \cdots, x_n) \in X_{k+1}$ entonces $f(x_1, \cdots, x_n) \in X_{k+1} - X_k$.

Por la condición 2 y la definición de X_{k+1}, existe algun $(y_1, \cdots, y_n) \in X_k^n$ tal que $f(x_1, \cdots, x_n) = f(y_1, \cdots, y_n)$. Ya que f es inyectiva sobre X_+^n, tenemos que $x_m = y_m$ para $1 \leq m \leq n$.

Así, tenemos que $(x_1, \cdots, x_n) \in X_k^n$ para $k < i$, contradiciendo la hipótesis de que $(x_1, \cdots, x_n) \in X_i^n - X_{i-1}^n$. Por lo tanto, $f(x_1, \cdots, x_n) \notin X_{k+1}$, estableciendo el paso inductivo sobre k. Pero esto también muestra que $X_i \neq X_{i+1}$, concluyendo el paso de inducción sobre i. $\square$

Se debe notar que las condiciones 1, 2 y 3 aplican a las restricciones de las funciones en F a X_+. En realidad existen casos en los cuales las funciones en F no son inyectivas sobre A y $f(A^m) \cap g(A^n) \neq \emptyset$ para funciones f y g distintas, pero las condiciones 1, 2 y 3 se cumplen y X_+ está generada libremente. El lema 1.6 se puede usar para formalizar que X_+ está libremente generada por X y F ssi todo elemento tiene una representación de árbol única.

No obstante, para definir precisamente que significa *representación mediante árboles*, es necesario mostrar que los árboles están generados libremente y definir una función de árboles a X_+, usando el teorema 1.7 que se probará después.

En lógica, los términos, las fórmulas y las pruebas están dadas mediante definiciones inductivas. Por lo tanto, otro concepto importante es el de una función definida recursivamente sobre un conjunto inductivo generado libremente.

1.3. Funciones definidas recursivamente sobre conjuntos inductivos generados libremente

Sean A un conjunto no vacío, X un subconjunto de A, F un conjunto de funciones sobre A y X_+ la cerradura inductiva de X bajo F. Sea B un conjunto no vacío y sea G un conjunto de funciones sobre el conjunto B tal que existe una función $d : F \to G$ que asocia con cada función f de aridad n en F, la función $d(f) : B^n \to B$ en G (d no necesita ser una biyección).

Teorema 1.7 (Teorema de extensión homomórfica única)**.** Si X_+ está generada libremente por X y F, para toda función $h : X \to B$, existe una función única $\widehat{h} : X_+ \to B$ tal que:

1. Para toda $x \in X, \widehat{h}(x) = h(x)$;

2. Para toda función f de aridad $n > 0$ en F, para todo $(x_1, \cdots, x_n) \in X_+^n$, $\widehat{h}(f(x_1, \cdots, x_n)) = g(\widehat{h}(x_1), \cdots, \widehat{h}(x_n))$, donde $g = d(f)$.

El siguiente diagrama ilustra el hecho de que $\widehat{h}$ extiende a h. La función η es la función inclusión de X en X_+.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "h"'] & X_+ \arrow[d, "\widehat{h}"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Las identidades 1 y 2 significan que $\widehat{h}$ es un *homomorfismo*, al cual frecuentemente se le llama la *extensión homomorfica única de h*. La cláusula 2 se puede describir mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X_+^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\widehat{h}^n"'] & X_+ \arrow[d, "\widehat{h}"] \\
B^n \arrow[r, "d(f)"'] & B
\end{tikzcd}$$

En el diagrama anterior, la función $\widehat{h}^n$ está definida mediante $\widehat{h}^n(x_1, \cdots, x_n) = (\widehat{h}(x_1), \cdots, \widehat{h}(x_n))$. Decimos que este diagrama es *conmutativo* si la composición $f \circ \widehat{h}$ es igual a la composición $\widehat{h}^n \circ g$.

Demostración. Definimos por inducción una secuencia de funciones $h_i : X_i \to B$ que satisfagan las condiciones 1 y 2 restringidas a X_i. Definimos $h_0 = h$. Dado h_i, sea h_{i+1} que tiene la siguiente gráfica:

$$\{(f(x_1, \cdots, x_n), g(h_i(x_1), \cdots, h_i(x_n))) \mid (x_1, \cdots, x_n) \in X_i^n - X_{i-1}^n, f \in F\} \cup graph(h_i) \text{ (con } g = d(f).)$$

Tenemos que checar que esta gráfica es en realidad funcional. Ya que X_+ está generado libremente, por el lema 1.6, $f(x_1, \cdots, x_n) \in X_{i+1} - X_i$ siempre que $(x_1, \cdots, x_n) \in X_i^n - X_{i-1}^n$, $(i \geq 0)$, y sólo tenemos que checar funcionalidad para la primera parte de la unión.

Ya que los elmenetos de G son funciones, por el lema 1.6, la única posibilidad para tener $(x, y) \in graph(h_i)$ y $(x, z) \in graph(h_i)$ para algún $x \in X_{i+1} - X_i$ es porque $x = f(x_1, \cdots, x_m) = f'(y_1, \cdots, y_n)$ para algún $(x_1, \cdots, x_m) \in X_i^m - X_{i-1}^m$, $(y_1, \cdots, y_n) \in X_i^n - X_{i-1}^n$ y para algunos constructores $f, f' \in F$.

Ya que $f(X_+^m)$ y $f'(^n_+)$ son disjuntos siempre que $f \neq f'$, $f(x_1, \cdots, x_m) = f'(y_1, \cdots, y_n)$ implica que $f = f'$ y $m = n$.

Ya que toda $f \in F$ es inyectiva sobre X_+^n, también debemos tener que $x_j = y_j$, para todo $j, 1 \leq j \leq n$. Pero entonces, $y = z = g(x_1, \cdots, x_n)$, con $g = d(f)$, mostrando funcionalidad.

En general $\widehat{h} = \bigcup_{i \geq 0} h_i$ es una función parcial, pero ya que $dom(\widehat{h}) = \bigcup_{i \geq 0} dom(h_i) = \bigcup_{i \geq 0} X_i = X_+$, $\widehat{h}$ es total sobre X_+. Más aun, es claro por la definición de las h_i que $\widehat{h}$ satisface 1 y 2.

Para probar que $\widehat{h}$ es única, para cualquier otra función h' que satisfaga 1 y 2, se puede demostrar fácilmente por inducción que $\widehat{h}$ y h' concuerdan con X_i, para todo $i \geq 0$. Esto prueba el teorema. $\square$