Ejercicios para la evaluación programada final
Lógica Matemática
Primavera 2012
Sección 102

José de Jesús Lavalle Martínez

2 de mayo de 2012

Observación 1 Recuerde las siguientes definiciones vistas en clase:

Definición 1 Una fórmula F es *verdadera* para la interpretación $\mathcal{I}$ (lo que escribimos como $\models_{\mathcal{I}} F$) ssi toda secuencia $S \in \Sigma$ satisface a F.

Definición 2 Se dice que F es *falsa* para la interpretación $\mathcal{I}$ (lo que escribimos como $\not\models_{\mathcal{I}} F$) ssi ninguna secuencia $S \in \Sigma$ satisface a F.

Definición 3 Se dice que una interpretación $\mathcal{I}$ es un *modelo* para un conjunto Γ de fórmulas ssi toda fórmula en Γ es verdadera para $\mathcal{I}$[1].

Observación 2 También recuerde que para una interpretación dada de un lenguaje de primer orden, una fórmula sin variables libres (llamada *fórmula cerrada* o *sentencia*) representa a una proposición que es verdadera o falsa, mientras que una fórmula con variables libres se puede satisfacer (ser verdadera) para algunos valores en el dominio y no satisfacer (ser falsa) para los otros valores.

[1] Con la simbología introducida diríamos: una interpretación $\mathcal{I}$ es un *modelo* para un conjunto Γ de fórmulas ssi para toda $F \in \Gamma$ se cumple que $\models_{\mathcal{I}} F$.

Ejercicio 1 Suponga que $D = \mathbb{Z}^+$ y que $\mathcal{I}(A_1^2) = \leq$ (en otras palabras, sean $y, z \in \mathbb{Z}^+, (y, z) \in \leq$ ssi $y \leq z$)[2], diga si las siguientes fórmulas son: verdaderas, falsas, o para que valores en el dominio se satisfacen.

1. $A_1^2(x_1, x_2)$
2. $\forall x_2(A_1^2(x_1, x_2))$
3. $\exists x_1(\forall x_2(A_1^2(x_1, x_2)))$

Ejercicio 2 Para las siguientes tres fórmulas y tres interpretaciones dadas, indique para que valores las fórmulas se satisfacen, cuando son verdaderas o cuando son falsas.

(I) $A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1)$

(II) $A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^2(x_2, x_1)$

(III) $\forall x_1(\forall x_2(\forall x_3((A_1^2(x_1, x_2) \wedge A_1^2(x_2, x_3)) \Rightarrow A_1^2(x_1, x_3))))$

1. $D = \mathbb{Z}^+, \mathcal{I}(A_1^2(y, z)) = y \geq z, \mathcal{I}(f_1^2(y, z)) = y \cdot z$ y $\mathcal{I}(a_1) = 2$
2. $D = \mathbb{Z}, \mathcal{I}(A_1^2(y, z)) = y = z, \mathcal{I}(f_1^2(y, z)) = y + z$ y $\mathcal{I}(a_1) = 0$
3. $D = 2^{\mathbb{Z}}, \mathcal{I}(A_1^2(y, z)) = y \subseteq z, \mathcal{I}(f_1^2(y, z)) = y \cap z$ y $\mathcal{I}(a_1) = \emptyset$

Ejercicio 3 Demuestre las siguientes propiedades:

I
   a) $\not\models_{\mathcal{I}} F$ ssi $\models_{\mathcal{I}} \neg F$
   b) $\models_{\mathcal{I}} F$ ssi $\not\models_{\mathcal{I}} \neg F$

II No es el caso que $\models_{\mathcal{I}} F$ y que $\models_{\mathcal{I}} \neg F$

III Si $\models_{\mathcal{I}} F$ y $\models_{\mathcal{I}} F \Rightarrow G$, entonces $\models_{\mathcal{I}} G$

IV $\not\models_{\mathcal{I}} F \Rightarrow G$ ssi $\models_{\mathcal{I}} F$ y $\models_{\mathcal{I}} \neg G$

V $\models_{\mathcal{I}} F$ ssi $\models_{\mathcal{I}} \forall x_i(F)$

[2] En lo que sigue, vamos a abusar de la notación y escribiremos, por ejemplo, $D = \mathbb{Z}^+, \mathcal{I}(A_1^2(y, z)) = y \leq z$, en lugar de escribir: $D = \mathbb{Z}^+, \mathcal{I}(A_1^2) = \leq$ (es decir, sean $y, z \in \mathbb{Z}^+, (y, z) \in \leq$ ssi $y \leq z$).