Sistema Axiomático para el Cálculo Proposicional Lógica Matemática

José de Jesús Lavalle Martínez

12 de julio de 2011

Resumen

Este documento es una traducción de partes de la sección *1.4 AN AXIOM SYSTEM FOR THE PROPOSITIONAL CALCULUS* del libro *Introduction to Mathematical Logic, Fourth Edition* de Elliot Mendelson.

Las tablas de verdad nos permiten responder muchas de las preguntas significativas sobre los conectivos lógicos, tales como, cuándo una proposición es una tautología, una contradicción, o ninguna de éstas, también cuándo una proposición implica lógicamente o es equivalente a alguna otra proposición.

Las partes más complejas de la lógica que trataremos posteriormente no pueden manejarse mediante tablas de verdad o por cualquier otro procedimiento efectivo similar. Consecuentemente, se tendrá que usar el enfoque de las teorías axiomáticas formales.

No obstante, como hemos visto, para el cálculo de proposiciones son suficientes las tablas de verdad, será instructivo ilustrar el método axiomático en esta rama sencilla de la lógica.

Una teoría formal $\mathscr{S}$ está definida cuando se satisfacen las condiciones siguientes:

1. Se proporciona un conjunto contable de símbolos como los símbolos de $\mathscr{S}$[1]. A una secuencia finita de símbolos de $\mathscr{S}$ se le llama una *e*xpresión de $\mathscr{S}$.

[1] Se pueden pensar a estos símbolos como objetos arbitrarios más que sólo como objetos lingüísticos.

2. Existe un subconjunto del conjunto de expresiones de $\mathscr{S}$ al que se le llama el conjunto de *fórmulas bien formadas* (fbfs) de $\mathscr{S}$. Usualmente existe un procedimiento efectivo para determinar cuándo una expresión dada es una fbf.

3. Existe un conjunto de fbfs al que se le llama el conjunto de *axiomas* de $\mathscr{S}$. Con mucha frecuencia se puede decidir efectivamente cuando una fbf es un axioma, en tal caso, a $\mathscr{S}$ se le llama una *teoría axiomática*.

4. Existe un conjunto finito de relaciones, $R_1, \ldots, R_n$, entre fbf, a estas relaciones se les llama *reglas de inferencia*. Para cada R_i, existe un único entero positivo j tal que, para cada conjunto de j fbfs y cada fbf $\mathscr{B}$, se puede decidir efectivamente cuándo las j fbfs dadas están en la relación R_i con $\mathscr{B}$, si lo están se dice que $\mathscr{B}$ se *se sigue o es consecuencia directa de* las fbfs dadas por virtud de R_i[2].

Una *prueba* en $\mathscr{S}$ es una secuencia $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_k$ de fbfs tales que, para cada i, es el caso que $\mathscr{B}_i$ es un axioma de $\mathscr{S}$ o que $\mathscr{B}_i$ es una consecuencia directa de algunas de las fbfs que le preceden en la secuencia por virtud de una de las reglas de inferencia de $\mathscr{S}$.

Un *teorema* de $\mathscr{S}$ es una fbf $\mathscr{B}$ de $\mathscr{S}$ tal que $\mathscr{B}$ es la última fbf de alguna prueba en $\mathscr{S}$. A tal prueba se le llama una *prueba de $\mathscr{B}$ en $\mathscr{S}$*.

Aún si $\mathscr{S}$ es axiomática -esto es, si existe un procedimiento efectivo para checar si alguna fbf dada es un axioma- la noción de 'teorema' no es necesariamente efectiva ya que, en general, no existe un procedimiento efectivo para determinar, dada cualquier fbf $\mathscr{B}$, cuando existe una prueba de $\mathscr{B}$.

Una teoría para la cual existe tal procedimiento efectivo se dice que es *decidible*; de otra manera, se dice que la teoría es *indecidible*.

Desde un punto de vista intuitivo, una teoría decidible es una para la cual se puede idear una máquina para saber que fbfs son teoremas, mientras que, para una teoría indecidible, se requiere de ingenio para determinar que fbfs son teoremas.

Se dice que una fbf $\mathscr{C}$ en una *consecuencia* en $\mathscr{S}$ de un conjunto Γ de fbfs si y sólo si existe una secuencia $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_k$ de fbfs tales que $\mathscr{C}$ es $\mathscr{B}_k$ y, para todo i, es el caso que $\mathscr{B}_i$ es un axioma, o $\mathscr{B}_i$ está en Γ o $\mathscr{B}_i$ es consecuencia

[2] Un ejemplo de una regla de inferencia será la regla *modus ponens* (MP): $\mathscr{C}$ se sigue de $\mathscr{B}$ y de $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$. De acuerdo a nuestra definición precisa, esta regla es la relación que consiste de todos los triples ordenados $\langle \mathscr{B}, \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}, \mathscr{C} \rangle$, donde $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son fbfs arbitrarias del sistema formal.

directa por alguna regla de inferencia de algunas de las fbfs que la preceden en la secuencia. A tal secuencia se le llama una *prueba* (o *deducción*) *de* $\mathscr{C}$ *a partir de* Γ. A los miembros de Γ se les llama *hipótesis* o *premisas* de la prueba.

Usamos $\Gamma \vdash \mathscr{C}$ como una abreviación para '$\mathscr{C}$ es una consecuencia de Γ'. Para evitar confución cuando se trabaja con más de una teoría, escribimos $\Gamma \vdash_{\mathscr{S}} \mathscr{C}$, agregando el subíndice $\mathscr{S}$, para indicar la teoría en cuestión.

Si Γ es un conjunto finito $\{\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_m\}$, escribimos $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_m \vdash \mathscr{C}$ en lugar de $\{\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_m\} \vdash \mathscr{C}$. Si Γ es el conjunto vacio $\emptyset$ entonces $\emptyset \vdash \mathscr{C}$ si y sólo si $\mathscr{C}$ es un teorema. Se acostumbra omitir el sígno '$\emptyset$' y escribir simplemente $\vdash \mathscr{C}$. De tal forma que $\vdash \mathscr{C}$ es otra forma de afirmar que $\mathscr{C}$ es un teorema.

Las siguientes son propiedades simples de la noción de consecuencia:

1. Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash \mathscr{C}$, entonces $\Delta \vdash \mathscr{C}$.

2. $\Gamma \vdash \mathscr{C}$ si y sólo si existe un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash \mathscr{C}$.

3. Si $\Delta \vdash \mathscr{C}$, y para cada $\mathscr{B}$ en Δ, $\Gamma \vdash \mathscr{B}$, entonces $\Gamma \vdash \mathscr{C}$.

La afirmación 1 representa el hecho de que si $\mathscr{C}$ es probable a partir de un conjunto Γ de premisas, entonces, si agregamos aún más premisass, $\mathscr{C}$ sigue siendo probable.

La mitad de 2 se sigue de 1. La otra mitad es obvia cuando notamos que cualquier prueba de $\mathscr{C}$ a partir de Γ usa sólo un número finito de las premisas de Γ.

La proposición 3 también es muy simple: si $\mathscr{C}$ es probable a partir de premisas en Δ, y cada premisa en Δ es probable a partir de premisas en Γ, entonces $\mathscr{C}$ es probable a partir de las premisas en Γ.

Ahora introducimos una teoría formal axiomática L para el cálculo proposicional.

1. Los símbolos de L son: $\neg, \Rightarrow, (,)$, y las letras A_i con enteros positivos i como subíndices: $A_1, A_2, A_3, \cdots$. A los símbolos $\neg$ y $\Rightarrow$ se les llaman *conectivos primitivos*, y a las letras A_i se les llaman *letras proposicionales*.

2. **(a)** Todas las letras proposicionales son fbfs.

(b) Si $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son fbfs, entonces también lo son $(\neg\mathscr{B})$ y $(\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C})$[3]. Así, una fbf de L es sólo una forma proposicional construida a partir de las letras proposicionales A_i mediante los conectivos $\neg$ y $\Rightarrow$.

3. Si $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son fbfs de L, entonces los siguientes son axiomas de L:

   (A1) $(\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{B}))$,

   (A2) $((\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D})) \Rightarrow ((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{D})))$,

   (A3) $(((\neg\mathscr{C}) \Rightarrow (\neg\mathscr{B})) \Rightarrow (((\neg\mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{C}))$.

4. La única regla de inferencia de L es *modus ponens*: $\mathscr{C}$ es una consecuencia directa de $\mathscr{B}$ y $(\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C})$. Abreviamos la aplicación de esta regla mediante MP[4].

Note que el conjunto infinito de axiomas de L se da mediante tres esquemas de axiomas (Esq. (A1), Esq. (A2)y Esq. (A3)), cada esquema abarca un número infinito de axiomas. Se puede checar fácilmente para cualquier fbf dada cuándo ésta es o no es un axioma; por lo tanto L es axiomática. Al definir el sistema L, es nuestra intención obtener como teoremas precisamente la clase de todas las tautologías.

Introducimos otros conectivos por definición:

(D1) $(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$ por $\neg(\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{C})$,

(D2) $(\mathscr{B} \vee \mathscr{C})$ por $(\neg\mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{C}$,

(D3) $(\mathscr{B} \Leftrightarrow \mathscr{C})$ por $(\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}) \wedge (\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{B})$.

El significado de (D1), por ejemplo, es que, para cualesquiera fbfs $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, '$(\mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$' es una abreviación para '$\neg(\mathscr{B} \Rightarrow \neg\mathscr{C})$'.

---

[3]Para ser precisos, debemos agregar la llamada cláusula extremal: (c) Una expresión es una fbf si y sólo si se puede mostrar que es una fbf sobre la base de las cláusulas (a) y (b).

[4]Un sinónimo común en español para modus ponens es *regla de separación.*

Lema 0.1. $\vdash_L \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}$ para toda fbf $\mathscr{B}$.

Demostración

1.	$\mathscr{B} \Rightarrow ((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B})$	Esq. (A1)
2.	$(\mathscr{B} \Rightarrow ((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}) \Rightarrow \mathscr{B})) \Rightarrow$ $((\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B})) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}))$	Esq. (A2)
3.	$(\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B})) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B})$	MP 1 y 2
4.	$\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B})$	Esq. (A1)
5.	$\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{B}$	MP 3 y 4

□

Proposición 0.2 (Teorema de la deducción)**.** Si Γ es un conjunto de fbfs, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son fbfs y $\Gamma, \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$, entonces $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$. En particular, si $\mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$, entonces $\vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$ (Herbrand, 1930).

Demostración

Sea $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n$ una prueba de $\mathscr{C}$ a partir de $\Gamma \cup \{\mathscr{B}\}$, donde $\mathscr{C}_n$ es $\mathscr{C}$. Probemos, por inducción sobre j, que $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_j$ para $1 \leq j \leq n$.

Primero, $\mathscr{C}_1$ debe: estar en Γ, ser un axioma de L o ser el mismo $\mathscr{B}$. Por el Esq. (A1), $\mathscr{C}_1 \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_1)$ es un axioma. Así, en los primeros dos casos, por MP, $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_1$.

Para el tercer caso, cuando $\mathscr{C}_1$ es $\mathscr{B}$, tenemos que $\vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_1$ por el lema 0.1, y por tanto $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_1$. Con esto tenemos resuelto el caso $j = 1$.

Ahora asuma que $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_k$, para todo $k < j$. Entonces $\mathscr{C}_j$ es un axioma, o $\mathscr{C}_j$ está en Γ, o $\mathscr{C}_j$ es $\mathscr{B}$, o $\mathscr{C}_j$ se sigue por modus ponens de algunas $\mathscr{C}_l$ y $\mathscr{C}_m$, donde $l, m < j$, y $\mathscr{C}_m$ tiene la forma $\mathscr{C}_l \Rightarrow \mathscr{C}_j$. En los primeros tres casos, $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_j$ como en el caso $j = 1$.

En el último caso, tenemos, por hipótesis de inducción, $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_l$ y $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{C}_l \Rightarrow \mathscr{C}_j)$. Pero, por el Esq. (A2), $\vdash ((\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{C}_l \Rightarrow \mathscr{C}_j)) \Rightarrow ((\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_l) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_j)))$. Así, por MP, $\Gamma \vdash (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_l) \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_j)$, y, nuevamente por MP, $\Gamma \vdash \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}_j$.

Así, la prueba por inducción está completada. El caso $j = n$ es el resultado deseado.[5] □

[5] Note que, dada una deducción de $\mathscr{C}$ a partir de Γ y $\mathscr{B}$, la prueba que se acaba de dar nos permite construir una deducción de $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$ a partir de Γ. También note que el Esq. (A3)no se usó para probar el teorema de la deducción.

Lema 0.3. Para cualesquiera fbfs $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$, las siguientes fbfs son teoremas de L.

1. $\mathscr{B} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{B}$
2. $\neg\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C})$
3. $\mathscr{B} \Rightarrow (\neg\mathscr{C} \Rightarrow \neg(\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}))$
4. $(\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow ((\neg\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{C})$

Demostración
Ejercicios de tarea. □

Proposición 0.4 (Teorema de validez)**.** Todo teorema de L es una tautología.

Demostración
Como un ejercicio, verifique que todos los axiomas de L son tautologías. También demuestre que modus ponens produce tautologías a partir de tautologías, es decir, si $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C}$ son tautologías, entonces $\mathscr{C}$ es tautología. Así, todo teorema de L es una tautología. □

Lema 0.5. Sean $\mathscr{B}$ una fbf y $B_1, \ldots, B_k$ las letras proposicionales que ocurren en $\mathscr{B}$. Para una asignación dada de valores de verdad a $B_1, \ldots, B_k$, sea B'_j igual a B_j si B_j toma el valor T, y sea B'_j igual a $\neg B_j$ si B_j toma el valor F. Sea $\mathscr{B}'$ igual a $\mathscr{B}$ si $\mathscr{B}$ toma el valor T bajo la asignación, y sea $\mathscr{B}'$ igual $\neg\mathscr{B}$ si $\mathscr{B}$ toma el valor F. Entonces $B'_1, \ldots, B'_k \vdash \mathscr{B}'$.[6]

[6] Por ejemplo, sea $\mathscr{B}$ igual a $\neg(\neg A_2 \Rightarrow A_5)$. Entonces a cada renglón de la tabla de verdad

A_2	A_5	$\neg(\neg A_2 \Rightarrow A_5)$
T	T	F
F	T	F
T	F	F
F	F	T

el lema 0.5 le establece una correspondiente relación de deducibilidad. Por ejemplo, correspondiente al tercer renglón la relación de deducibilidad es $A_2, \neg A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \Rightarrow A_5)$, y para el cuarto renglón es $\neg A_2, \neg A_5 \vdash \neg(\neg A_2 \Rightarrow A_5)$.

Demostración
La prueba es por inducción sobre el número n de ocurrencias de $\neg$ y $\Rightarrow$ en $\mathscr{B}$. (Asumimos que $\mathscr{B}$ está escrito sin abreviaciones.) Si $n = 0$, $\mathscr{B}$ sólo es la letra proposicional B_1, y el lema se reduce a $B_1 \vdash B_1$ y $\neg B_1 \vdash \neg B_1$. Asuma ahora que el lema se cumple para todo $j < n$.

Caso 1. $\mathscr{B}$ es $\neg\mathscr{C}$. Entonces $\mathscr{C}$ tiene menos de n ocurrencias de $\neg$ y $\Rightarrow$.

Subcaso 1a. Suponga que $\mathscr{C}$ toma el valor T bajo la asignación de valores de verdad dada. Entonces $\mathscr{B}$ toma el valor F. Así, $\mathscr{C}'$ es $\mathscr{C}$ y $\mathscr{B}'$ es $\neg\mathscr{B}$. Por la hipótesis de inducción aplicada a $\mathscr{C}$, tenemos $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathscr{C}$. Entonces, por el lema 0.3.1 y MP, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\neg\mathscr{C}$. Pero $\neg\neg\mathscr{C}$ es $\mathscr{B}'$.

Subcaso 1b. Suponga que $\mathscr{C}$ toma el valor F. Entonces $\mathscr{B}$ toma el valor T. Así, $\mathscr{C}'$ es $\neg\mathscr{C}$ y $\mathscr{B}'$ es $\mathscr{B}$. Por hipótesis de inducción, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\mathscr{C}$. Pero $\neg\mathscr{C}$ es $\mathscr{B}'$.

Caso 2. $\mathscr{B}$ es $\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D}$. Entonces $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ tienen menos ocurrencias de $\neg$ y $\Rightarrow$ que $\mathscr{B}$. Así, por la hipótesis de inducción, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathscr{C}'$ y $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathscr{D}'$.

Subcaso 2a. Suponga que $\mathscr{C}$ toma el valor F. Entonces $\mathscr{B}$ toma el valor T. De tal manera, $\mathscr{C}'$ es $\neg\mathscr{C}$ y $\mathscr{B}'$ es $\mathscr{B}$. Así, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\mathscr{C}$. Por el lema 0.3.2 y MP, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D}$. Pero $\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D}$ es $\mathscr{B}'$.

Subcaso 2b. Suponga que $\mathscr{D}$ toma el valor T. Entonces $\mathscr{B}$ toma el valor T. De tal manera, $\mathscr{D}'$ es $\mathscr{D}$ y $\mathscr{B}'$ es $\mathscr{B}$. Así, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathscr{D}$. Entonces, por el Esq. (A1)y MP, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D}$. Pero $\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D}$ es $\mathscr{B}'$.

Subcaso 2c. Suponga que $\mathscr{C}$ toma el valor T y $\mathscr{D}$ toma el valor F. Entonces, $\mathscr{B}$ toma el valor F. De tal manera, $\mathscr{C}'$ es $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}'$ es $\neg\mathscr{D}$ y $\mathscr{B}'$ es $\neg\mathscr{B}$. Por lo tanto, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathscr{C}$ y $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\mathscr{D}$. Así, por el lema 0.3.3 y MP, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg(\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D})$. Pero $\neg(\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{D})$ es $\mathscr{B}'$.

$\square$

Proposición 0.6 (Teorema de completitud)**.** Si una fbf $\mathscr{B}$ de L es una tautología, entonces es un teorema de L.

Demostración
(Kalmár, 1935) Asuma que $\mathscr{B}$ es una tautología, y sean $B_1, \ldots, B_k$ las letras proposicionales en $\mathscr{B}$. Para cualquier asignación de valores de verdad a $B_1, \ldots, B_k$, tenemos, por el lema 0.5, $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathscr{B}$.[7]

Por lo tanto, cuando a B_k' se le da el valor T obtenemos $B_1', \ldots, B_{k-1}', B_k \vdash \mathscr{B}$, y cuando a B_k se le da el valor F obtenemos $B_1', \ldots, B_{k-1}', \neg B_k \vdash \mathscr{B}$.

Así, aplicando el teorema de la deducción obtenemos $B_1', \ldots, B_{k-1}' \vdash B_k \Rightarrow \mathscr{B}$ y $B_1', \ldots, B_{k-1}' \vdash \neg B_k \Rightarrow \mathscr{B}$. Luego, por el lema 0.3.4 y MP obtenemos $B_1', \ldots, B_{k-1}' \vdash \mathscr{B}$.

Similarmente, se puede elegir a B_{k-1} para que sea T o F, aplicando nuevamente el teorema de la deducción, el lema 0.3.4 y MP podemos eliminar a B_{k-1}' tal y como eliminamos a B_k'. Después de k veces finalmente obtenemos $\vdash \mathscr{B}$. □

Corolario 0.7. Si $\mathscr{C}$ es una expresión que involucra los signos $\neg, \Rightarrow, \wedge, \vee$ y $\Leftrightarrow$, que es una abreviación para una fbf $\mathscr{B}$ de L, entonces $\mathscr{C}$ es una tautologia si y sólo si $\mathscr{B}$ es un teorema de L.

Demostración
Justifique. □

Corolario 0.8. El sistema L es consistente, esto es, no existe fbf $\mathscr{B}$ tal que tanto $\mathscr{B}$ como $\neg\mathscr{B}$ sean teoremas de L.

Demostración
Por la proposición 0.4, todo teorema de L es una tautologia. La negación de una tautologia no puede ser una tautología y, por lo tanto, es imposible que tanto $\mathscr{B}$ como $\neg\mathscr{B}$ sean teoremas de L. □

Note que L es consistente si y sólo si no todas las fbfs de L son teoremas. En efecto, si L es consistente, entonces existen fbfs que no son teoremas (e.g., las negaciones de los teoremas). Por otro lado, por el lema 0.3.2, $\vdash_L \neg\mathscr{B} \Rightarrow (\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{C})$, y así, si L fuera inconsistente, esto es, si alguna fbf $\mathscr{B}$ y su negación $\neg\mathscr{B}$ fueran probables, entonces por MP cualquier fbf $\mathscr{C}$ sería probable.[8]

[7] $\mathscr{B}'$ es $\mathscr{B}$ porque como $\mathscr{B}$ es una tautología siempre toma el valor T.

[8] Esta equivalencia se cumple para cualquier teoria que tiene modus ponens como una regla de inferencia y en la cual el lema 0.3.2 es probable.

Una teoria en la cual no todas las fbfs son teoremas se dice que es *absolutamente consistente*, esta definición es aplicable aún a teorías que no contienen un signo de negación.