1.2.1. Series

Hemos expresado algunas sumas "largas" haciendo uso del PIM. Consideraremos ahora sumas infinitas. Si tenemos una secuencia dada por los valores de a_i para cada $i \in \mathbb{N}$, se define la n-ésima suma como:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

entonces la suma de todos los elementos de a_i es $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n$. El resultado que presenta la proposición 7 es muy útil y además fácil de demostrar.

Proposición 7 Si para $i \in \mathbb{N}$, $a_i = (i-1)d$ y $b_i = r^{i-1}$ con $d \in \mathbb{R}$ y $r \neq 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{d}{2} n(n+1) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Con base en esta proposición, puede ahora calcularse la suma $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, esto es calcular el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r}$. Aplicando la respuesta de un problema del ejer.10 tenemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} r^{i-1} = \frac{1}{1-r}.$$

cuando $|r| < 1$. Esto significa que, por ejemplo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^i} + \ldots = 2.$$

A pesar de que el resultado encontrado aparenta ser aplicado a la suma $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}$, llamada *serie armónica*, ésta no converge cuando n tiende a infinito. Consideremos la siguiente agrupación de la suma:

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2} \\ +\frac{1}{3} + \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{2} \\ +\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &\geq \frac{1}{2} \\ &\cdots \\ +\frac{1}{2^i+1} + \ldots + \frac{1}{2^{i+1}} &\geq \frac{1}{2} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Lo cual indica que para $n = 2^{i+1}$, $H_n > \sum_{j=0}^{i+1} \frac{1}{2}$, entonces $H_n > \frac{\log n+1}{2}$. Y evidentemente $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n+1}{2} = \infty$, luego H_n diverge.

Ejercicio 11

1. Pruebe la prop. 7.
2. Explique por qué $\sum_{i=1}^{\infty} r^{i-1} = \frac{1}{1-r}$.
3. Existe una prueba alternativa de que la serie armónica diverge. Usando integrales se obtiene que $\log(n+1) < H_n \leq 1 + \log(n)$. Proporcione una explicación de este planteamiento.

1.3. Probabilidad

El carácter indeterminístico de los fenómenos naturales no ha impedido el desarrollo de planteamientos que nos lleven a garantizar la obtención de estados sujetos a ciertas premisas. Por el contrario, la modelación de los fenómenos ha incorporado el indeterminismo como un elemento más de las formulaciones matemáticas. Este componente por tradición se ha basado en la teoría de las probabilidades, de lo cual expondremos sólo lo necesario para nuestro trabajo en el análisis de los algoritmos.

Supongamos que deseamos ejecutar un programa en un sistema con cuatro procesadores, y que es necesario para iniciar la ejecución tener disponibles tres procesadores. En un momento determinado, el sistema tiene una carga específica y es natural preguntarnos en qué momento empezará a ejecutarse el programa. Podemos simplificar la anterior pregunta diciendo ¿cuál es la probabilidad de que tres procesadores estén libres?

Para dar respuesta a lo anterior debemos precisar algunas ideas como cuáles son los posibles estados del sistema. Se dice que la observación del sistema es un *experimento* que puede tener diferentes *estados* o *resultados*. Al conjunto de todos los posibles estados se le conoce como *espacio muestral*, $\mathcal{U}$. Denotemos con p_1, p_2, p_3 y p_4 a los procesadores de nuestro ejemplo. Sabemos que cada uno puede estar libre u ocupado. Así, el resultado de observar el sistema puede representarse como una cadena binaria $x_1x_2x_3x_4$, con $x_i = 0$ si p_i está libre y $x_i = 1$ si p_i está ocupado. Notemos que las cadenas 0100, 1000 y 0001 satisfacen nuestro requisito para ejecutar el programa, pero aún no podemos dar respuesta a nuestra pregunta sobre los procesadores desocupados. Observemos, en primer lugar, que el requisito no es un estado particular más bien es un conjunto de estados específicos, lo cual es llamado *evento*. Un evento es entonces cualquier subconjunto de $\mathcal{U}$. En nuestro ejemplo, $\mathcal{U} = \{x_1x_2x_3x_4 | x_i = 0, 1\}$, esto es:

0000	0001	0010	0011
0100	0101	0110	0111
1000	1001	1010	1011
1100	1101	1110	1111

El evento que deseamos describir es "al menos tres procesadores desocupados". Intuitivamente, necesitamos saber cuál es el tamaño del evento de interés, para referirnos a su probabilidad. Por ejemplo, si nuestro evento es que "un procesador esté ocupado o desocupado", claramente todos los estados de $\mathcal{U}$ lo satisfacen, en otras palabras, la probabilidad de este evento es segura. Lo contrario sucede cuando el evento es que "ningún procesador esté libre u ocupado", su probabilidad es imposible, ningún estado lo satisface. Aunque éstos son dos eventos extremos exhiben la idea de que la probabilidad puede enfocarse desde un punto de vista frecuentista: convenimos que la probabilidad de un evento sea proporcional al tamaño del subconjunto que lo representa. Con más generalidad se habla de una medida. Dado un espacio muestral $\mathcal{U}$, se define una *medida de probabilidad* $\Pr : 2^{\mathcal{U}} \to [0,1]$, que asigna un valor a cada subconjunto de $\mathcal{U}$, y satisface:

1. $\Pr(\mathcal{U}) = 1$.
2. $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

Observación 4 Con las propiedades de Pr pueden derivarse otras que resultan también útiles para los cálculos como:

1. $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$.
2. $\Pr(\emptyset) = 0$.
3. $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$.

Cada una de éstas puede ser demostrada con facilidad. La última expresión surge de la identidad de conjuntos $A = A \cap \mathcal{U} = A \cap (B \cup B^c)$.

La medida frecuentista antes aludida se define para un evento, $A \subseteq \mathcal{U}$, como

$$\Pr(A) = \frac{\#A}{\#\mathcal{U}},$$

la fracción de estados favorables respecto de $\mathcal{U}$. Lo cual cumple con las propiedades de medida de probabilidad, por ejemplo $\Pr(\mathcal{U}) = \frac{\#\mathcal{U}}{\#\mathcal{U}} = 1$. Esto nos conduce como lo habíamos señalado a contar los elementos de los subconjuntos de $\mathcal{U}$. Regresando a nuestro ejemplo, calculemos con esta medida algunos eventos. Sean los eventos $e_1 =$"al menos un procesador libre", $e_2 =$"tres procesadores libres" y $e_3 =$"al menos tres procesadores libres". En el primer caso podemos hacer uso del complemento $e_1^c =$"todos ocupados" para el cual sólo hay un estado, por tanto $\Pr(e_1) = 1 - \Pr(e_1^c) = 1 - 1/16$. El evento e_2 es equivalente a insertar un uno en una cadena de tres