Agregamos, por último, que la inducción puede realizarse con más de una variable, cuando queremos demostrar afirmaciones del estilo $\mathcal{A}(n,m), (n,m \in \mathbb{N})$. Nuevamente, podemos hacer uso de un predicado adicional para convertir lo anterior al planteamiento original del PIM. La base de la inducción es $\mathcal{A}(1,1)$. Se consideran ahora dos pasos de inducción, en el primero definimos: $\mathcal{B}(n) \doteq \mathcal{A}(n,1)$ para probar que $\mathcal{B}(n) \to \mathcal{B}(n+1)$. En el segundo paso el predicado adicional es $\mathcal{C}(m) \doteq (\forall n)\mathcal{A}(n,m)$, y debe demostrarse $\mathcal{C}(m) \to \mathcal{C}(m+1)$.

1.2. Límites

Uno de nuestros objetivos es caracterizar un algoritmo como una función. Es importante, entonces, saber analizar una función y poder compararla con otras, de este modo decidir cuál algoritmo es mejor. La función que representa a un algoritmo dependerá del tamaño de los datos de entrada. Y aunque sabemos que este tamaño siempre será finito interesa, con fines de clasificación, conocer su *comportamiento asintótico*, es decir su tendencia cuando el tamaño de la entrada de datos crece indefinidamente. Estos aspectos se expondrán con precisión en la sección 3, por ahora prepararemos las condiciones que permitan llevar a cabo el análisis mencionado.

Para $n > 1$ tenemos que $n < n^2$. Asimismo, $0 < \frac{1}{n} < 1$. Cuando n crece, cada vez $\frac{1}{n}$ es más pequeño pero nunca es cero; éste es llamado su límite. En general, se espera que siempre que "encerremos" el límite de una función f con una circunferencia de radio ϵ, entonces todos los valores de f estarán dentro de esta circunferencia, excepto quizá algunos cuantos. Más formalmente, sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función, se dice que f *converge* a ℓ, o que ℓ es el *límite* de f cuando n tiende a infinito sii para toda $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_\epsilon$ entonces $|f(n) - \ell| < \epsilon$. Simbólicamente $\lim_{n\to\infty} f(n) = \ell$. Alternativamente, f no tiene límite cuando no es posible "encerrar" un valor con una circunferencia de radio arbitrario y que todos los valores de la función estén dentro, excepto algunos. Esto sucede, por ejemplo, cuando f crece (decrece) indefinidamente, lo que también se simboliza con $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ ($\lim_{n\to\infty} f(n) = -\infty$), aunque f más bien diverja. En este caso se define: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tiende a ∞ sii para todo $M \in \mathbb{N}$ existe $N_M \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) > M$ para toda $n > N_M$. En forma semejante se define que f tiende a $-\infty$. Notemos que la definición de divergencia al infinito puede transformarse en afirmar que: si $f(n) > g(n)$, para $n > n_0$ y $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$. Debe tenerse presente que también se habla de divergencia si f "oscila", ejemplo de ello es $f(n) = (-1)^n$.

Observación 3

1. Para $f(n) = \frac{1}{n}$ intuimos que su límite era 0. Según la definición, debe cumplirse que si $n > N_\epsilon$ entonces $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon$, para toda ϵ. Debemos entonces elegir N_ϵ dependiendo de ϵ para verificar la implicación. Esto lo hacemos apoyándonos en la desigualdad que deseamos cumplir: $\frac{1}{n} < \epsilon$, equivalentemente $n > \frac{1}{\epsilon}$. Lo último nos conduce a tomar $N_\epsilon = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$ para lograr nuestro objetivo. Ya que si $n > N_\epsilon$ entonces $n > \frac{1}{\epsilon}$, esto es $\frac{1}{n} < \epsilon$.
2. Conociendo algunos límites básicos es posible calcular otros de manera sencilla. A continuación se enuncian algunas operaciones básicas. Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$ y $\lim_{n\to\infty} g(n) = b$, entonces:
   a) $\lim_{n\to\infty} f(n) + g(n) = a + b$.
   b) $\lim_{n\to\infty} f(n)g(n) = ab$.
   c) $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = a/b$, si $b \neq 0$ y $g(n) \neq 0$ para $n > n_0$.
   d) $a \leq b$, si $f(n) \leq g(n)$, para $n > n_0$.
3. Es fácil obtener los límites de muchas funciones, como es el caso de $q(n) = \frac{n^2+2n-3}{3n^2-n+7}$, ya que podemos cambiar la forma de la expresión sin alterarla:
$$q(n) = \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{3 - \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}},$$
luego, como el denominador no es cero, y tanto éste como el numerador están compuestos de funciones que tienen límite, aplicamos las operaciones del inciso anterior para obtener que $\lim_{n\to\infty} q(n) = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 9

1. Demuestre con base en la definición que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.
2. Diga por qué se cumplen las siguientes igualdades:
   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.
   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}$.
3. Diga cuál es el límite cuando n tiende a infinito de
$$\frac{p_k n^k + p_{k-1} n^{k-1} + \ldots + p_1 n + p_0}{q_j n^j + q_{j-1} n^{j-1} + \ldots + q_1 n + q_0},$$
considerando tres casos: $k > j$, $k = j$ y $k < j$.
4. Demuestre que si una función es creciente entonces diverge.

Nos interesa, en particular, conocer la convergencia de cocientes. Es por ello que analizaremos algunos casos observando la convergencia de las partes de una fracción. Dada $h(n) = f(n)/g(n)$, podemos conjeturar que si $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$ y $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$, entonces h converge a cero. También, para este caso $\lim_{n\to\infty} g(n)/f(n) = \infty$. Esto se expresa en la siguiente proposición.

Proposición 5 $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$ sii $\lim_{n\to\infty} g(n)/f(n) = \infty$.

Obsérvese que puede ser que $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$, sin embargo $f(n)/g(n)$ converja. Un ejemplo de esto es $\frac{n}{n+1}$. La proposición que sigue es una observación como la mencionada.

Proposición 6 Sea f tal que $\lim_{n\to\infty} f(n+1)/f(n) = a$.

1. Si $|a| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$.
2. Si $a > 1$ y $f(n) > 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

El teorema de *l'Hôpital*, que se demuestra a continuación, es una herramienta más que ayuda a obtener límites.

Teorema 5 Supongamos que $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} g(n) = 0$, o bien $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$, y $\lim_{x\to\infty} \bar{f}'(x)/\bar{g}'(x) = \ell$, donde $\bar{f}$ y $\bar{g}$ son las correspondientes extensiones de f y g a los reales ($\bar{f}, \bar{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Entonces
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell.$$

Ejercicio 10

1. Dé dos funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que f y g no converjan pero $f + g$ si lo haga.
2. Calcule los límites:
   a) $\lim_{n\to\infty} p^n$ con $p \in \mathbb{R}$.
   b) $\lim_{n\to\infty} n^p x^n$ con $p > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.
   c) $\lim_{n\to\infty} n^p x^n$ con $p < 0$ y $x \in \mathbb{R}$.
   d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}$.
   e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}}$.
   f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^p}$ con $p > 0$.
   g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log \log n)^p}{\log n}$, con $p > 0$.