Proposición 3 Para $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Demostración. Debe demostrarse que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.
Base: $1 = \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1}{2}1(1+1) = \frac{2}{2}$.
Inducción: Tenemos la hipótesis

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Así:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2+3n+2)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad \square\end{aligned}$$

Otras sucesiones pueden ser demostradas similarmente a la anterior, como la suma de los cuadrados de los primeros n naturales.

Ejercicio 7

1. Diga por qué
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$
2. Demuestre las identidades:
   a)
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$
   b)
   $$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$
   c)
   $$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}.$$

Conviene asimismo utilizar un lenguaje más flexible para las sucesiones. Esto es la *definición por recurrencia* o, más frecuente en el lenguaje computacional, por recursión. Por ejemplo, el factorial puede ser definido en forma recurrente como:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

Es decir, el n-ésimo valor está definido en términos de los anteriores. Un caso muy importante es:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases},$$

la *sucesión de Fibonacci* (S. XIII), una recurrencia de la que pueden derivarse otras expresiones, por ejemplo: $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ y $F_{n+1} = 2F_{n-1} + F_{n-2}$. Las propiedades de la serie de Fibonacci son realmente sorprendentes, además se tienen diversas aplicaciones, en particular el diseño de algunas estructuras de datos. A la fecha continua la investigación sobre las propiedades de esta recurrencia. En la siguiente proposición se enuncia una propiedad básica.

Proposición 4 Los términos de la sucesión de Fibonacci satisfacen la siguiente relación:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

Demostración. Por inducción sobre n. Base: $\sum_{i=1}^{1} F_i^2 = 1^2$ y $F_1 F_2 = 1 \cdot 1$.
Inducción: Suponemos $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ (HI). Debe demostrarse que $\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1} F_{n+2}$. Usando HI desarrollamos el lado izquierdo de la última igualdad:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} F_i^2 + F_{n+1}^2\\ &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2\\ &= F_{n+1}(F_{n+1} + F_n)\\ &= F_{n+1} F_{n+2}. \qquad \square\end{aligned}$$

Ya hemos dicho que el PIM puede tener variantes como que el caso base corresponda a un valor diferente a 1. También puede establecerse un predicado $\mathcal{B}(n) = \mathcal{A}(1) \wedge \mathcal{A}(2) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}(n)$, de tal forma que el paso de inducción utilice todos los casos previos y no solamente el anterior, esto es: $\mathcal{A}(i) \to \mathcal{A}(n+1)$, para $i \leq n$. En términos de $\mathcal{B}$ queda como originalmente se planteó: $\mathcal{B}(n) \to \mathcal{B}(n+1)$. Esta forma del PIM se conoce como principio de inducción generalizada del cual el teorema siguiente es un ejemplo.
Uno de los más famosos resultados sobre la sucesión de Fibonacci es la *fórmula de Moivre*. Por medio de esta fórmula es posible calcular el n-ésimo término de la sucesión sin utilizar la definición recurrente. Aunque podrá observarse que no ahorra de modo alguno el cálculo, debido a las operaciones implicadas y a la necesidad de una precisión tan grande como los valores en juego. La prueba del teorema siguiente es por inducción generalizada pero esta demostración no puede considerarse dentro de los ejemplos vistos, pues contiene un elemento procedente de los métodos desarrollados para resolver recurrencias, lo cual será presentado en detalle más adelante.

Teorema 4 El n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci es:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}},$$

donde $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ y $\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

Demostración. Observemos primero que α y β son raíces de la ecuación $1 + x = x^2$. Claramente obtenemos $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Demostremos que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ dado que $F_m = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^m - \beta^m)$ para todo $m < n$ (HI). Como siempre, desarrollamos parte de la tesis usando HI:

$$\begin{aligned}F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} - \beta^{n-1} - \beta^{n-2})\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-2}(1+\alpha) - \beta^{n-2}(1+\beta)),\end{aligned}$$

puesto que $1 + \alpha = \alpha^2$ y $1 + \beta = \beta^2$, entonces $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$. $\square$

Ejercicio 8

1. Demostrar que la sucesión
$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 2i + c_{i-1} - 1 & \text{si } i > 1 \end{cases},$$
satisface que $c_n = n^2$ para $n \geq 1$.
2. Demostrar que los términos de la sucesión de Fibonacci satisfacen las siguientes relaciones:
   a) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.
   b) $F_1 F_2 + F_2 F_3 + \ldots + F_{2n-1} F_{2n} = F_{2n}^2$.
   c) $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$ para $n \geq 2$.