2. Diga qué valores satisfacen la relación $86400n^2 < n^3$.
3. Determine el valor de c para que se cumpla la desigualdad:
   a) $n^3 - 3n^2 - n - 8 < cn^3$.
   b) $cn^3 < n^3 - 3n^2 - n - 8$.
   c) $n^2 + n^3 + n \log n < cn^3$.

En lo que sigue será empleada notación adicional como sumatorias y productos, conveniente para expresar fórmulas importantes que se apoyan en la inducción. Es común escribir los términos de una suma "largaçomo $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, donde se supone conocido los términos a_i, y los puntos suspensivos abrevian sólo la escritura. La suma anterior se representa con $\sum_{i=1}^{n} a_i$, donde identificamos el símbolo de suma ($\sum$), el índice (i), y los límites inferior y superior del índice (en este caso 1 y n, respectivamente). Es claro que si todos los términos de una sumatoria son iguales, entonces se tiene el producto del número de elementos sumados por el término que se suma, por definición de producto: $\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$. Igualmente podemos explicar otras operaciones en esta notación, como: $\sum_{i=1}^{n} b \cdot a_i = b \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$ y $\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$, la primera por distributividad del producto sobre la suma y, la segunda, por la asociatividad de la suma.

Ejercicio 6 Justifique las siguientes igualdades:

1. $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
2. $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}.$$
3. $$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}.$$
4. $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n.$$
5. $$(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j.$$

Una operación semejante es el producto de n términos: $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$. En particular, se define el *factorial* de un natural n como: $n! = \prod_{i=1}^{n} i$. El factorial puede ser entendido como las posibles permutaciones de n objetos. Expliquémoslo más. Debemos tener presente que dado un conjunto A de k objetos, tendríamos k posibles elecciones de un objeto. Si, en cambio, deseamos formar parejas del conjunto A tendremos k^2 de éstas, cuando permitimos la repetición, pero solamente $k(k-1)$ si no permitimos la repetición de objetos al formar las parejas de A. Es fácil encontrar expresiones para formar ternas, cuartetos u otras tuplas de objetos. En el razonamiento anterior estamos haciendo uso de una regla del conteo llamada "del producto": multiplicamos el número de posibilidades del conjunto que interviene en cada elección. Una *permutación* es una manera de disponer en orden n objetos. Para determinar una permutación procedemos eligiendo uno por uno de los objetos: si tenemos n objetos iniciales: para elegir el primero hay n posibilidades, para elegir el segundo sólo habrá $n-1$ etcétera, para el último habrá una posibilidad. Así, por la regla del producto, la cantidad de posibles permutaciones de n objetos es $n!$. También es útil referirnos a las combinaciones de un conjunto de n objetos. La diferencia con las permutaciones es que en una combinación no importa el orden de los objetos, lo cual tiene sentido cuando se combinan k objetos a partir de n; ya que combinar n a partir de n sólo tenemos una combinación. Por el argumento expuesto para determinar la cantidad de permutaciones, una *combinación* de k objetos tomada de n, denotado por $\binom{n}{k}$, se forma en primer lugar de $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{i=n}^{n-k+1} i$ formas. Estos k objetos pueden a su vez ser dispuestos en $k!$ maneras, como se ha visto. Por tanto, si despreciamos el orden de las $\prod_{i=n}^{n-k+1} i$ formas obtenidas tendremos que $\binom{n}{k} = \prod_{i=n}^{n-k+1} i/k!$. La expresión $\binom{n}{k}$ se lee *binomial* k de n.

Observación 2

1. Partiendo de la definición de combinación, veamos algunos valores del binomial:
   a) No tomar ningún elemento de n es una forma de elección: $\binom{n}{0} = 1$.
   b) Al tomar uno, de un total de n, hay n formas de hacerlo: $\binom{n}{1} = n$.
   c) Para tomar todos sólo hay un modo: $\binom{n}{n} = 1$
   d) Tomar $n-1$ de n equivale a quitar uno de ellos, los cuales son n posibles: $\binom{n}{n-1} = n$

   Como será visto adelante, el nombre binomial proviene del empleo de este valor en la potencia de un binomio.
2. En $\binom{n}{k}$ k es menor o igual a n, de manera que si construimos una tabla variando n y k obtendremos un triángulo. Tomemos en cada renglón un valor de n y en cada columna uno de k. Lo singular de este triángulo es que: (i) en la diagonal y la primera columna solamente hay unos, ya que $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{n} = 1$, (ii) los demás valores se determinan observando que cada uno es la suma del que está arriba de él con el que está arriba a la izquierda de él: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Esta tabla es conocida como *Triángulo de Pascal*.

Partiendo de la regularidad observada en las potencias de $(1+x)$ $(1+2x+x^2, 1+3x+3x^2+x^3, \ldots)$ puede conjeturarse la identidad conocida como *Binomio de Newton* demostrada a continuación.

Teorema 3 Para toda $n \geq 0$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Demostración. Por inducción sobre n.
Base: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k = \binom{1}{0} x^0 + \binom{1}{1} x^1 = (1+x)^1$.
Inducción: Suponemos que

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Debemos demostrar que

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k.$$

Por hipótesis

$$(1+x)^{n+1} = (1+x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}.$$

Agrupando términos en la última expresión:

$$\binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}) x^k + \binom{n}{n} x^{n+1}$$
$$= \binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k. \qquad \square$$

Es importante conocer además algunas fórmulas que relacionan sumas de sucesiones. A menudo usada es la que presenta la siguiente proposición.