que permiten llevar a cabo el razonamiento matemático en el modelo que vamos a proponer.

La notación que será empleada queda especificada en el presente párrafo. Un conjunto se representa extensionalmente, por ejemplo $\{3,6,9,12\}$ o intensionalmente, $\{x|x$ es un múltiplo de 3 menor que $15\}$. Es común el empleo de los conjuntos de números: naturales, enteros, racionales y reales, denotados por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, respectivamente. Dados dos conjuntos A y B, el conjunto de elementos comunes a A y B o intersección, se expresa por $A \cap B$. Empleando la relación de pertenencia "$\in$", entre un elemento a y un conjunto B, $a \in B$, $A \cap B$ se escribe $\{x|x \in A \text{ y } x \in B\}$. Asimismo, se llama unión de A y B al conjunto $\{x|x \in A \text{ o } x \in B\}$ y producto de A por B, a $A \times B = \{(x,y)|x \in A \text{ y } y \in B\}$. Se dice que el conjunto A está contenido en el conjunto B si todo elemento de A está en B: $A \subset B$. Algunas definiciones vienen a complementar lo anterior.

Sea P un conjunto. Una *relación binaria* R definida en P es un subconjunto de $P \times P$. Así, $x, y \in P$ se dicen relacionados por R, xRy, si $(x,y) \in R$. Con más generalidad podemos concebir una relación R de aridad $m > 0$ definida en una colección de m conjuntos $\{P_i\}_i$ como un subconjunto del *universo* $U = \Pi_{i=1}^{m} P_i = P_1 \times \ldots \times P_m$. Si $m = 1$ suele llamarse a R *propiedad*. Es también usual que una relación binaria vista como un subconjunto de $P \times Q$ sea llamada *correspondencia*. Particularmente, cuando una correspondencia $R \subset P \times Q$ es tal que para cada $x \in P$ existe un único elemento $y \in Q$ tal que xRy, tenemos una *función* $P \to Q$. Dada una función $f : P \to Q$, a P se le llama *dominio*, a Q *imagen*, y a $f(P) = \{y \in Q|y = f(x), \text{ para algún } x \in P\}$ el *rango*. Si $f(P) = Q$, f se llama *suprayectiva*, y si para cualesquier $x_1, x_2 \in P, x_1 \neq x_2$ se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$ a f se le llama *inyectiva*. Si $f : P \to Q$ es *biyectiva* (inyectiva y suprayectiva) existe una función $f^{-1} : Q \to P$ que se llama la *inversa* de f, i.e. $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda $x \in P$.

Sea P un conjunto, R una relación en P y x, y, z cualesquier elementos de P. R es una relación: *reflexiva* si xRx, *simétrica* si xRy implica yRx, *transitiva* si xRy y yRz implica xRz, *antisimétrica* si xRy y yRx implica $x = y$. Sea P un conjunto y R una relación definida en P: R es de *equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva, R es de *orden* (más precisamente, *orden parcial*) si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Si para toda pareja $x, y \in P$ sucede que xRy o yRx, se dice que R es un *orden total*.

1.1. Técnicas de demostración

En esencia requerimos de definiciones y propiedades para explicar algún hecho dentro de la matemática. Por ejemplo: afirmamos que el producto de dos impares es impar, pues si observamos cualesquier pareja de impares, digamos $a = 2i + 1$ y $b = 2j + 1$, expresamos su producto: $ab = 4ij + 2i + 2j + 1 = 2(2ij + i + j) + 1$, esto es un impar. Observemos que la afirmación es en general, y que esto está considerado al dar a y b cualesquiera, solamente partiendo de la definición de impar. Luego usamos las propiedades de la multiplicación para nuevamente observar el resultado. Normalmente, partir de las definiciones y escribir lo que se está afirmando constituye la pauta de la demostración, si no es que la demostración misma. Con una demostración logramos asegurar que la afirmación conjeturada adquiera un rango de verdad siempre que se satisfagan las premisas empleadas. Estaremos enunciando, en lo que sigue, propiedades de los números enteros o reales, y realizaremos algunas demostraciones. Recordemos que para los números reales se cumple $b^{v+w} = b^v \cdot b^w$. Se define $\log_b x = y$ si y sólo si (sii) $x = b^y$, es igual decir que $\log_b(x)$ es la función inversa de b^y: $y = \log_b x = \log_b b^y$. Demostremos que $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$: Usamos la definición en la parte izquierda de lo que deseamos demostrar: $b^{\log_b(xy)} = xy$ y observamos qué sucede en la parte derecha de la igualdad: $b^{\log_b x + \log_b y}$, a esta última aplicamos la propiedad enunciada de las potencias: $b^{\log_b x} \cdot b^{\log_b y}$ y aplicando nuevamente la definición a esta fórmula, tenemos que $b^{\log_b x + \log_b y} = xy$. Es decir, se cumple la igualdad. Usaremos simplemente log para indicar $\log_2$ y ln para $\log_e$ (logaritmo natural).

Ejercicio 1 Demuestre que:

1. $\log_b x^y = y \log_b x$
2. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
3. $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$

Veamos otro ejemplo. Se define para $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$, el *suelo* de x, como el mayor entero que no es mayor que x (p.e. $\lfloor 32{,}7 \rfloor = 32$, $\lfloor -0{,}2 \rfloor = -1$), asimismo $\lceil x \rceil$ como el menor entero que no es menor que x, el *techo* de x. Intuitivamente, podemos conjeturar que se cumple: $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$. Para asegurar que así es, debe demostrarse cada una de las desigualdades de la expresión anterior. Abordaremos las primeras dos. Observemos que, por definición, el suelo de un real x nunca estará a una distancia de $\lfloor x \rfloor$ mayor que uno (el caso extremo es cuando x es entero), en fórmulas: $x - \lfloor x \rfloor < 1$, luego $x - 1 < \lfloor x \rfloor$. La segunda desigualdad se cumple por definición. El suelo es útil en las siguientes definiciones: dados dos enteros a, b el cociente de dividir a por b se denota a/b, y el *cociente entero* $a \div b \doteq \lfloor a/b \rfloor$, además *a módulo b* es $a \bmod b = a - b \times (a \div b)$.

Ejercicio 2 Demuestre que

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.
2. $a \leq b^{\lceil \log_b a \rceil} < ab$.
3. Para cualesquier $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq a$, es cierto que $b \mod a < b/2$.

La práctica de demostraciones se ha sistematizado al grado de llegar a establecer un conjunto de reglas para llevar a cabo demostraciones con mayor alcance. La lógica ofrece sistemas para expresar variadas formas de concebir la veracidad de una expresión. Frecuentemente usamos fórmulas lógicas como $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, donde se tienen los conectivos negación, implicación, disyunción, conjunción, y equivalencia, con $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, cualesquier fórmula o, en su caso más simple, una proposición p_i (p.e. "$11 < 3$", "WTC es el edificio más alto", etc.) aquellas que no pueden ser descompuestas. Aunque también conviene referirse a predicados, que generalizan las proposiciones por permitir el uso de variables. Las fórmulas se constituyen ahora con cuantificadores: $\forall x\mathcal{A}$ y $\exists x\mathcal{A}$. Para las últimas tenemos una relación: si decimos que para todo x se cumple $\mathcal{A}$, estamos afirmando que no existe x que no cumpla con $\mathcal{A}$: $\forall x\mathcal{A}$ equivale a $\neg\exists x\neg\mathcal{A}$. También participan en el lenguaje de la lógica símbolos auxiliares como la coma y los paréntesis. Deben distinguirse dentro de las expresiones que pueden formarse con este lenguaje aquellas que están bien construidas o fbc. Para la buena formación de expresiones se siguen los patrones que presentaron a los conectivos, unas líneas arriba. Esto es $\mathcal{A}\neg$ no está bien formada, tampoco $\mathcal{A}\mathcal{B}$, pero sí $(\mathcal{B} \vee \mathcal{A}) \leftrightarrow \mathcal{B}$ y $(\mathcal{B} \to \mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$, etc.

Diremos un poco más sobre las fórmulas compuestas por proposiciones. Como una fbc se forma de acuerdo con los patrones antes vistos, y la veracidad de una fbc depende de la veracidad de sus componentes (composicionalidad), tendremos que conocer la veracidad de los elementos más simples: las proposiciones. Implícitamente estamos considerando conocimiento de la forma en que se evalúan los conectivos. Más formalmente, una *valuación* es una función v cuyo dominio es el conjunto de las fbcs y cuyo rango es el conjunto $\{V, F\}$, tal que para cualesquier fbcs $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$:

1. $v(\mathcal{A}) \neq v(\neg\mathcal{A})$,
2. $v(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = F$ sii $v(\mathcal{A}) = V$ y $v(\mathcal{B}) = F$.
3. $v(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = F$ sii $v(\mathcal{A}) = F$ y $v(\mathcal{B}) = F$.
4. $v(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = V$ sii $v(\mathcal{A}) = V$ y $v(\mathcal{B}) = V$.
5. $v(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}) = V$ sii $v(\mathcal{A}) = v(\mathcal{B})$.