(1) Dados dos conjuntos $A, B$, probar que para $\forall a_1, a_2 \in A$ y $\forall b_1, b_2 \in B$ se cumple

$$\big\{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\big\} = \big\{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\big\}$$

ssi

$$a_1 = a_2 \text{ y } b_1 = b_2.$$

(2) (a) Probar que la composición de dos funciones inyectivas es inyectiva. Probar que la composición de dos funciones sobreyectivas es sobreyectiva.

(b) Probar que una función, $f : A \to B$, es inyectiva ssi para cualesquiera funciones $g, h : C \to A$,

$$\text{si } f \circ g = f \circ h, \text{ entonces } g = h$$

(c) Probar que una función $f : A \to B$ es sobreyectiva, ssi para cualesquiera funciones $g, h : B \to C$,

$$\text{si } g \circ f = h \circ f \text{ entonces } g = h.$$

(3) Sea $R \subseteq A \times A$ una relación. Pruebe que si $R \circ R = id_A$, entonces $R$ es la gráfica de una función biyectiva cuya inversa es igual a ella misma.

(4) Sean $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ y $T \subseteq C \times D$ tres relaciones. Pruebe que

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

(5) Sea $R \subseteq A \times B$ relación. Probar que $R \circ id_B = R$.

(6) Sean $f : A \to A'$ y $g : B \to B'$ dos funciones y defina $h : A \times B \to A' \times B'$ mediante

$$h(\langle a, b\rangle) = \langle f(a), g(b)\rangle,$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$.

(a) Pruebe que si $f$ y $g$ son inyectivas, entonces también lo es $h$.

(b) Pruebe que si $f$ y $g$ son sobreyectivas, entonces también lo es $h$.

(7) Sea $(1, -1)$ es conjunto de números reales

$$(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}.$$

Sea $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ la función dada por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Probar que $f$ es biyectiva. Encuentre la inversa de $f$.

(8) Considere el poset $\langle \mathbb{N}^+, | \rangle$. Muestre que $\forall a, b \in \mathbb{N}^+$ se cumple que $a \wedge b = MCD(a, b)$ (máximo común divisor de $a$ y $b$).

(9) Sea $\langle X, \leq\rangle$ un retículo. Muestre que $\forall a \in X$ se cumplen

(a) $a \vee a = a$

(b) $a \wedge a = a$.

(10) Dibujar el diagrama de Hasse de todos los divisores positivos de 60, donde el orden parcial es la relación de divisibilidad $|$. ¿Es cierto que cada par de elementos tiene un "meet" y un "join"?

(11) Suponga que existe $\perp$ en un poset $\langle X, \leq\rangle$. Muestre que $\vee\varnothing = \perp$.

(12) Sea $\langle X, \leq\rangle$ un poset. Si $X$ tiene mínimo $\perp$ y cada subconjunto no vacío $A$ de $X$ tiene $\vee A$, pruebe entonces que $X$ es un retículo completo.

(13) Sea $\langle X, \leq \rangle$ un poset. Se define entonces la siguiente relación $<<$ sobre $X \times X = \{(a, b) \mid a \in X \text{ y } b \in X\}$:

$$(x, y) << (x', y') \text{ ssi } \begin{cases} x = x' \text{ y } y = y' \\ \text{ó} \\ x < x' \\ \text{ó} \\ x = x' \text{ y } y < y' \end{cases}$$

Muestre que $<<$ es un orden parcial.

(14) Probar que $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, << \rangle$ está bien fundado.

(15) Sea $A$ la función de Ackermann. Pruebe, usando el principio de inducción completa que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N},\ A(x, y) > y + 1.$$

*Sugerencia:* ¿Cuáles son los minimales de $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}$ con el orden $<<$?

(16) Dé un ejemplo de un poset donde el principio de inducción completa falla.

(17) Sea $n \in \mathbb{Z}$ fijo. Se define la siguiente relación en $\mathbb{Z}$:

$$x \equiv y \pmod{n} \text{ ssi } n | (x - y).$$

Mostrar que tal relación es de equivalencia.

(18) Calcular las tablas de la suma y del producto de
  (a) $\mathbb{Z}_3$
  (b) $\mathbb{Z}_4$
  (c) $\mathbb{Z}_5$

(19) Calcule $[3]^{-1}$ en $\mathbb{Z}_7$

(20) ¿Existe $[3]^{-1}$ en $\mathbb{Z}_6$?

(21) Determinar si la relación $R$ en el conjunto de todas las personas es reflexiva, simétrica, antisimétrica, y/o transitiva, donde $aRb$ si
  (a) $a$ es más alto que $b$
  (b) $a$ y $b$ nacieron el mismo día
  (c) $a$ tiene el mismo nombre de pila que $b$
  (d) $a$ y $b$ tienen un abuelo o abuela en común

(22) ¿Cuáles de las siguientes relaciones en $\{0, 1, 2, 3\}$ son de equivalencia? ¿Cuáles son de orden parcial? ¿Qué propiedades faltan para que lo sean?
  (a) $\{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
  (b) $\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 2\rangle, \rangle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
  (c) $\{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
  (d) $\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

(23) Sean $R, S$ dos relaciones sobre el conjunto $X$.
  (a) Pruebe que si $R$ y $S$ son ambas reflexivas entonces $R \circ S$ es reflexiva.
  (b) Pruebe que si $R, S$ son ambas transitivas y además $R \circ S = S \circ R$ entonces $R \circ S$ es transitiva. ¿Se puede omitir la hipótesis $R \circ S = S \circ R$?
  (c) Probar que si $R$ y $S$ son ambas relaciones de equivalencia y si $R \circ S = S \circ R$ entonces $R \circ S$ es la menor relación de equivalencia que contiene tanto a $R$ como a $S$.

(24) Sea $R$ una relación sobre el conjunto $X$. Probar que $R^*$ es la menor relación transitiva y reflexiva que contiene a $R$.

(25) Sean $R, S$ relaciones sobre un conjunto $X$. Demostrar que

(a) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
(b) $(R^{-1})^{-1} = R$
(c) si $R \subseteq S$ entonces $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

(26) Sea $R$ una relación sobre un conjunto $X$. Pruebe que

$$(R \cup R^{-1})^*$$

es la relación de equivalencia más pequeña que contiene a $R$.

(27) Sea $R$ la siguiente relación sobre $X = \{a, b, c, d\}$:

$$R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle\}$$

(a) Calcule la cerradura reflexiva de $R$.
(b) Calcule la cerradura transitiva de $R$.
(c) Calcule la cerradura transitiva y reflexiva de $R$.
(d) Calcule la cerradura de equivalencia de $R$