Notas de Lógica Matemática

César Bautista Ramos

Contenido

Capítulo 1

Cálculo Proposicional

Argumentos de tipo informal sobre por qué un sistema funciona no capta debilidades cruciales. El sistema resulta frágil. Un enfoque alternativo para el diseño e implementación de sistemas se basa en usar un lenguaje formal para su especificación, y así poder razonar sobre sistemas de software.

Preguntas del tipo:

- ¿Este programa que acepta un arreglo de enteros produce un arreglo ordenado?
- ¿Este programa accede a una localidad de memoria no disponible?
- ¿Esta función siempre para?

son frecuentes. Para responderlas necesitamos de un "sistema de cálculo": lógica proposicional (PL) y luego lógica de primer orden (FOL).

El tipo de afirmaciones que se estudian son del tipo:

PL : "el cielo es azul", "esta afirmación se refiere a sí misma": éstas se llaman *proposiciones*.

FOL : "x es azul", "y se refiere a z": éstas se llaman *predicados*.

En Lógica los conceptos más fundamentales son:

- **satisfactibilidad:** (¿esta fórmula es alguna vez cierta?)
- **validez:** (¿esta fórmula es siempre cierta?)

1. Sintaxis de PL

Sintaxis: se refiere a un conjunto de símbolos y reglas para combinarlos y formar "afirmaciones" ó fórmulas de un lenguajes (sistema formal).

Los símbolos que se usan en la Lógica Proposicional son:

(1) $\top$ (top,cierto), $\bot$ (bottom, falso)

(2) Letras proposicionales: $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$. En general, las letras proposicionales son las primeras letras mayúsculas del alfabeto con o sin subíndices escritas en itálica.

(3) Conectivos lógicos o booleanos: si $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ son fórmulas, entonces
- $\neg\mathcal{F}$: negación (no)
- $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$: conjunción (y)
- $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$: disyunción (o)
- $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$: implicación (implica), $\mathcal{F}_1$ antecedente y $\mathcal{F}_2$ consecuente.
- $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$: ssi (si y sólo si)

Nótese que $\neg$ es un conectivo de aridad uno; los demás conectivos tienen aridad dos.

Definición 1.

(1) Los **átomos** *son:* $\top, \bot$ *y las letras proposicionales* $P, Q, \dots$

(2) Una **literal** *es un átomo o su negación.*

(3) Una **fórmula** *es una literal o la aplicación de un conectivo lógico a una o varias fórmulas.*

Definición 2. *Una fórmula* $\mathcal{G}$ *es una* **subfórmula** *de una fórmula* $\mathcal{F}$ *si aparece sintácticamente en* $\mathcal{F}$. *Más precisamente:*

(1) La única subfórmula de un átomo es el propio átomo.

(2) Las subfórmulas de $\neg\mathcal{F}$ *son* $\neg\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{F}$.

(3) Las subfórmulas de $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow F_2$ *son las fórmulas mismas y* F_1, F_2.

Una **subfórmula esctricta** es una fórmula que no es la fórmula misma.

Ejemplo 3. Sea la fórmula

$$\mathcal{F} : (P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \neg Q)$$

entonces tenemos:

- letras proposicionales: P, Q.
- átomos: P, Q
- literales: $P, Q, \neg Q$ ($\neg Q$ no es un átomo).
- subfórmulas: $\mathcal{F}, P \wedge Q, P \vee \neg Q, \neg Q, P, Q$.

Los paréntesis son a veces innecesarios. Para esto se define la **precedencia** de los conectivos: de alto a bajo,

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow .$$

En caso de empate se asocia a la derecha (precaución: esta convención cambia de texto en texto).

Ejemplo 4. Sea

$$\mathcal{F} : P \wedge Q \rightarrow P \vee Q.$$

Tal $\mathcal{F}$ es la abreviatura de la fórmula que se obtiene al restaurar paréntesis:

(1) $(P \wedge Q) \rightarrow P \vee Q$

(2) $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$

Es decir $\mathcal{F}$ abrevia a

$$\mathcal{F}' : (P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$$

Ejemplo 5. Restaurar los paréntesis de

$$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \top \vee \neg P_1 \wedge P_2.$$

Sol.

(1) $P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \top \vee \neg P_1 \wedge P_2$

(2) $P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \top \vee (\neg P_1) \wedge P_2$

(3) $P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \top \vee (\neg P_1) \wedge P_2$

(4) $P_1 \wedge (\neg P_2) \wedge \top \vee (\neg P_1) \wedge P_2$

(5) $P_1 \wedge (\neg P_2) \wedge \top \vee (\neg P_1) \wedge P_2$

(6) $P_1 \wedge (\neg P_2) \wedge \top \vee ((\neg P_1) \wedge P_2)$

(7) $P_1 \wedge (\neg P_2) \wedge \top \vee ((\neg P_1) \wedge P_2)$

(8) $P_1 \wedge ((\neg P_2) \wedge \top) \vee ((\neg P_1) \wedge P_2)$

(9) $P_1 \wedge ((\neg P_2) \wedge \top) \vee ((\neg P_1) \wedge P_2)$

(10) $(P_1 \wedge ((\neg P_2) \wedge \top)) \vee ((\neg P_1) \wedge P_2)$

(11) $(P_1 \wedge ((\neg P_2) \wedge \top)) \vee ((\neg P_1) \wedge P_2)$

(12) $(P_1 \wedge ((\neg P_2) \wedge \top)) \vee ((\neg P_1) \wedge P_2)$

Ejemplo 6. Restaurar paréntesis:

$$A \leftrightarrow \neg B \vee C \rightarrow A$$

Sol.

(1) $A \leftrightarrow \neg B \vee C \rightarrow A$

(2) $A \leftrightarrow (\neg B) \vee C \rightarrow A$

(3) $A \leftrightarrow (\neg B) \vee C \rightarrow A$

(4) $A \leftrightarrow ((\neg B) \vee C) \rightarrow A$

(5) $A{\leftrightarrow}((\neg B){\vee}C){\rightarrow}A$

(6) $A{\leftrightarrow}(((\neg B){\vee}C){\rightarrow}A)$

(7) $A{\leftrightarrow}(((\neg B){\vee}C){\rightarrow}A)$

(8) $A{\leftrightarrow}(((\neg B){\vee}C){\rightarrow}A)$

Recíprocamente, de una fórmula se pueden eliminar paréntesis siempre y cuando se puedan restaurar. Por ejemplo, de la fórmula

$$(B \rightarrow (\neg(\neg A)))$$

se pueden eliminar todos los paréntesis:

$$B \rightarrow \neg\neg A$$

pues estos se pueden restaurar a la fórmula original. Pero de la fórmula

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$$

no se pueden eliminar paréntesis, pues si lo hacemos queda

$$P \rightarrow Q \rightarrow R$$

que de acuerdo a nuestras convenciones se restaura a

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

que no es la fórmula original.

Tarea 1. *Eliminar tantos paréntesis como sea posible:*

(1) $((B \rightarrow (\neg A)) \wedge C)$

(2) $((A \vee B) \vee C)$

(3) $(((A \wedge (\neg B)) \wedge C) \vee D)$

(4) $((B \vee (\neg C)) \vee (A \wedge B))$

(5) $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg(C \vee D)))$

(6) $((\neg(\neg(\neg(B \vee C)))) \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$

(7) $(\neg((\neg(\neg(B \vee C))) \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)))$

(8) $((((A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)) \wedge (\neg A)) \vee C)$

Tarea 2. *Restaurar paréntesis.*

(1) $C \vee \neg A \wedge B$

(2) $B \rightarrow \neg\neg\neg A \wedge C$

(3) $C \rightarrow \neg(A \wedge B \rightarrow C) \wedge A \leftrightarrow B$

(4) $C \rightarrow A \rightarrow A \leftrightarrow \neg A \vee B$

Tarea 3. *Determinar cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas de PL, y de las que lo sean, restaurar sus paréntesis.*

(1) $\neg\neg A \leftrightarrow A \leftrightarrow B \vee C$

(2) $\neg(\neg A \leftrightarrow A) \leftrightarrow B \vee C$

(3) $\neg(A \rightarrow B) \vee C \vee D \rightarrow B$

(4) $A \leftrightarrow (\neg A \vee B) \rightarrow (A \wedge (B \vee C)))$

(5) $\neg A \vee B \vee C \wedge D \leftrightarrow A \wedge \neg A$

(6) $((A \rightarrow B \wedge (C \vee D) \wedge (A \vee D))$

Tarea 4. *Si escribimos* $\neg\mathcal{F}$ *en lugar de* $(\neg\mathcal{F})$, $\rightarrow \mathcal{F}\mathcal{G}$ *en lugar de* $(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G})$, $\wedge\mathcal{F}\mathcal{G}$ *en lugar de* $(F \wedge \mathcal{G})$ *y* $\vee\mathcal{F}\mathcal{G}$ *en lugar de* $(\mathcal{F} \vee G)$*, entonces no hay necesidad de paréntesis. Por ejemplo,* $((\neg A) \wedge (B \rightarrow (\neg D)))$*, la cual ordinariamente se abrevia como* $\neg A \wedge (B \rightarrow \neg D)$*, se convierte en* $\wedge\neg A \rightarrow B\neg D$*. Esta forma de escritura se llama* **notación polaca***.*

(1) Escribir $((C \rightarrow (\neg A)) \vee B$ *y* $(C \vee ((B \wedge (\neg D)) \rightarrow C))$ *en notación polaca.*

(2) Escribir las fórmulas de la tarea 1 en notación polaca.

2. Semántica

La semántica de la Lógica le provee significado: **true**, **false**, donde **true**$\neq$**false**.

Definición 7. *Una* **interpretación** *(***asignación, modelo***)* I *es una asignación de cada letra proposicional de un único valor de verdad.*

Por ejemplo,

$$\begin{array}{rl} I: & P \mapsto \mathbf{true} \\ & Q \mapsto \mathbf{false} \\ & \vdots \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rl} I: & P \mapsto 1 \\ & Q \mapsto 0 \\ & \vdots \end{array}$$

Dada una interpretación I y una fórmula $\mathcal{F}$ de PL se puede calcular el valor de verdad de $\mathcal{F}$. La forma más popular es mediante tablas:

$\mathcal{F}$	$\neg\mathcal{F}$
0	1
1	0

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Ejemplo 8. Sea $\mathcal{F} : P \wedge Q \rightarrow P \vee \neg Q$ con interpretación

$$I : \{P \mapsto \mathbf{true}, Q \mapsto \mathbf{false}\}$$

entonces $\mathcal{F}$ es verdadera, pues

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee \neg Q$	$\mathcal{F}$
1	0	1	0	1	1

Una definición más precisa se obtiene haciendo la propia definición de forma *inductiva.*

Definición 9. *Sea $\mathcal{F}$ una fórmula, I una interpretación. Se pone*

(1) $I \models \mathcal{F}$ ssi $\mathcal{F}$ se valua a **true** *bajo I.*

(2) $I \not\models \mathcal{F}$ ssi $\mathcal{F}$ se valua a **false** *bajo I.*

El símbolo $\models$ se lee *válida, modela.*

Definición 10.

(1) Para cualquier interpretación I se cumplen:

$$I \models \top, \quad I \not\models \bot$$

(2) Si P es letra proposicional y I interpretación,

$$I \models P \text{ ssi } I[P] = \mathbf{true}$$

esto es, $I \models P$ ssi I le asigna a P el valor **true***. O equivalentemente*

$$I \not\models P \text{ ssi } I[P] = \mathbf{false}$$

(3) Si $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ son fórmulas, I interpretación,

(a) $I \models \neg\mathcal{F}$ ssi $I \not\models \mathcal{F}$
(b) $I \models \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$ ssi $I \models \mathcal{F}_1$ y $I \models \mathcal{F}_2$
(c) $I \models \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ ssi $I \models \mathcal{F}_1$ ó $I \models \mathcal{F}_2$
(d) $I \models \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ ssi (si $I \models \mathcal{F}_1$ entonces $I \models \mathcal{F}_2$)
(e) $I \models \mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ ssi ($I \models \mathcal{F}_2$ y $I \models \mathcal{F}_2$) ó ($I \not\models \mathcal{F}_1$ y $I \not\models \mathcal{F}_2$)

Nótese que $I \not\models \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ ssi $(I \models \mathcal{F}_1$ entonces $I \models \mathcal{F}_2)$ es falso lo cual ocurre sólo si $I \models \mathcal{F}_1$ es verdadero y $I \models \mathcal{F}_2$ es falso. Esto es

$$I \not\models \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \text{ ssi } I \models \mathcal{F}_1 \text{ y } I \not\models \mathcal{F}_2.$$

Para calcular valores de verdad se hace siguiendo el orden para subfórmulas; de fórmulas menos complejas a las más. Esto es, $\mathcal{F}_1$ precede a $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_1$ es subfórmula de $\mathcal{F}_2$.

Ejemplo 11. Sean $\mathcal{F} : P \wedge Q \to P \vee \neg Q$, $I : \{P \mapsto \mathbf{true}, Q \mapsto \mathbf{false}\}$, entonces,

(1) $I \models P$ pues $I[P] = \mathbf{true}$
(2) $I \not\models Q$, pues $I[Q] = \mathbf{false}$
(3) $I \models \neg Q$, semántica de $\neg$
(4) $I \not\models P \wedge Q$ por (2) y semántica de $\wedge$
(5) $I \models P \vee \neg Q$ por (1) y semántica de $\vee$
(6) $I \models \mathcal{F}$, por (4) y semántica de $\to$

Definición 12.

(1) Una fórmula $\mathcal{F}$ es **satisfactible** *si existe una interpretación I tal que*

$$I \models \mathcal{F}.$$

(2) Una fórmula $\mathcal{F}$ es **válida** *(***tautología***) si para toda interpretación I se cumple*

$$I \models \mathcal{F}.$$

(3) Una fórmula se dice **insatisfactible** *si no es satisfactible.*

Hay cierta relación entre satisfactibilidad y validez: $\neg\mathcal{F}$ es insatisfactible si para toda interpretación I se cumple $I \not\models \neg\mathcal{F}$ lo cual ocurre ssi para toda interpretación I, $I \models \mathcal{F}$ ssi $\mathcal{F}$ es válida. En resumen:

$\neg\mathcal{F}$ es insatisfactible ssi $\mathcal{F}$ es válida.

Hay varias formas de determinar validez y satisfactibilidad:

(1) Tablas de verdad.
(2) Argumentos semánticos.

(pero éstas no son las únicas).

2.1. Tablas de verdad.

Ejemplo 13. Sea $\mathcal{F} : P \wedge Q \to P \wedge \neg Q$ ¿Es $\mathcal{F}$ válida?

Sol. Construimos la tabla de verdad.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$\mathcal{F}$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Cada renglón representa una posible interpretación. De hecho, para toda interpretación I, $I \models \mathcal{F}$, así $\mathcal{F}$ es válida.

Ejemplo 14. Sea $\mathcal{F} : P \vee Q \to P \wedge Q$. ¿Es $\mathcal{F}$ satisfactible?

Sol. La tabla de verdad:

	P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\mathcal{F}$
I_1:	0	0	0	0	1
I_2:	0	1	0	1	0
I_3:	1	0	0	1	0
I_4:	1	1	1	1	1

Podemos observar que hay interpretaciones que validan a la fórmula. Por ejemplo, $I_4 : \{P \mapsto \mathbf{true}, Q \mapsto \mathbf{true}\}$ cumple

$$I_4 \models \mathcal{F}$$

por tanto $\mathcal{F}$ es satisfactible (por cierto $\mathcal{F}$ no es válida).

2.2. Razonamientos semánticos. Se procede por contradicción. Se trata de comenzar suponiendo que la fórmula a determinar $\mathcal{F}$ es falsa, es decir, se supone que existe una interpretación I tal que $I \not\models \mathcal{F}$. Entonces se procede aplicando la semántica de los conectivos en forma de **reglas de prueba**.

Una regla de prueba tiene una o más premisas y una o más deducciones. Éstas son:

- $\dfrac{I \models \neg\mathcal{F}}{I \not\models \mathcal{F}}$ $\qquad \dfrac{I \not\models \neg\mathcal{F}}{I \models \mathcal{F}}$
- $\dfrac{I \models \mathcal{F} \wedge \mathcal{G}}{\begin{array}{l} I \models \mathcal{F} \\ I \models \mathcal{G} \end{array}}$ $\qquad \dfrac{I \not\models \mathcal{F} \wedge \mathcal{G}}{I \not\models \mathcal{F} \quad | \quad I \not\models \mathcal{G}}$
- $\dfrac{I \models \mathcal{F} \vee \mathcal{G}}{I \models \mathcal{F} \quad | \quad I \models \mathcal{G}}$ $\qquad \dfrac{I \not\models \mathcal{F} \vee \mathcal{G}}{\begin{array}{l} I \not\models \mathcal{F} \\ I \not\models \mathcal{G} \end{array}}$
- $\dfrac{I \models \mathcal{F} \to \mathcal{G}}{I \not\models \mathcal{F} \quad | \quad I \models \mathcal{G}}$ $\qquad \dfrac{I \not\models \mathcal{F} \to \mathcal{G}}{\begin{array}{l} I \models \mathcal{F} \\ I \not\models \mathcal{G} \end{array}}$

Nótese que $I \models \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$ ssi $I \models \mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ ó $I \not\models .\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$. Además

$$\begin{aligned} I \not\models \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G} &\text{ ssi } (I \models \mathcal{G} \text{ y } I \not\models \mathcal{G}) \text{ ó } (I \not\models \mathcal{F} y I \models \mathcal{G}) \\ &\text{ ssi } (I \models \mathcal{F} \text{ y } I \models \neg\mathcal{G}) \text{ ó } (I \models \neg\mathcal{F} \text{ y } I \models \mathcal{G}) \\ &\text{ ssi } (I \models \mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}) \text{ ó } I \models \neg\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \end{aligned}$$

Por lo que se pone:

- $\dfrac{I \models \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}}{I \models \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \quad | \quad I \not\models \mathcal{F} \vee \mathcal{G}}$ $\qquad \dfrac{I \not\models \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}}{I \models \mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G} \quad | \quad I \models \neg\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}}$

- $$\begin{array}{ccc} I & \models & \mathcal{F} \\ I & \models & \neg\mathcal{F} \\ \hline I & \models & \perp \end{array}$$

Esta última indica una contradicción, pues antes definimos que nunca $\perp$ se podía validar.

Ejemplo 15. Probar que la fórmula es válida.

$$\mathcal{F} : P \wedge Q \to P \vee \neg Q$$

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $\mathcal{F}$ es inválida, es decir, que existe una interpretación I tal que $I \not\models \mathcal{F}$. Entonces

(1) $I \not\models P \wedge Q \to P \vee \neg Q$, hipótesis
(2) $I \models P \wedge Q$, semántica de $\to$ y (1)
(3) $I \not\models P \vee \neg Q$, semántica de $\to$ y (1)
(4) $I \models P$, semántica de $\wedge$ y (2)
(5) $I \models Q$, semántica de $\wedge$ y (2)
(6) $I \not\models P$, semántica de $\vee$ y (3)
(7) $I \not\models \neg Q$, semántica de $\vee$ y (3)
(8) $I \models \neg P$, semántica de $\neg$ y (6)
(9) $I \models Q$, semántica de $\neg$ y ()
(10) $I \models \perp$, semántica de $\perp$ y (4), (8)

$$\therefore \mathcal{F} \text{ es válida.}$$

□

En el ejemplo anterior también se pudo haber escrito:

(1) $I \not\models P \wedge Q \to P \vee \neg Q$, hipótesis
(2) $I \models P \wedge Q$, semántica de $\to$ y (1)
(3) $I \not\models P \vee \neg Q$, semántica de $\to$ y (1)
(4) $I \models P$, semántica de $\wedge$ y (2)
(5) $I \not\models P$, semántica de $\vee$ y (3)
(6) $I \models \perp$, semántica de $\perp$ y (4), (5)

Hay ocasiones en que en las pruebas hay que examinar varios casos. Esto es, las pruebas se *ramifican*.

Ejemplo 16. Probar que la fórmula es válida.

$$\mathcal{F} : (P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$$

Demostración. Por contradicción. Supóngamos que no es válida, i.e., existe I una interpretación tal que $I \not\models \mathcal{F}$.

(1) $I \not\models \mathcal{F}$

(2) $I \models (P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow R)$, por (1) y semántica de $\rightarrow$,

(3) $I \not\models (P \rightarrow Q)$, (1) y semántica de $\rightarrow$

(4) $I \models P$, (3) y semántica de $\rightarrow$

(5) $I \not\models R$, (3) y semántica de $\rightarrow$

(6) $I \models P \rightarrow Q$, (2) y semántica de $\wedge$

(7) $I \models Q \rightarrow R$, (2) y semántica de $\wedge$

Ahora hay dos casos de (6): $I \not\models P$ ó $I \models Q$.

(8a) $I \not\models P$, (6) y semántica de $\rightarrow$
(9a) $I \models \neg P$, (8a) y semántica de $\neg$
(10a) $I \models \perp$, (9a), (4) y semántica de $\perp$
Con lo que se termina este caso. Pero falta uno:
(8b) $I \models Q$, (6) y semántica de $\rightarrow$
y ahora hay dos subcasos de (7): $I \not\models Q$ ó $I \models R$
(9ba) $I \not\models Q$, (7) y semántica de $\rightarrow$
(10ba) $I \models \neg Q$, (9ba) y semántica de $\neg$
(11ba) $I \models \perp$, (8b), (10ba) y semántica de $\perp$.
Con lo que se termina este subcaso.
(9bb) $I \models R$, (7) y semántica de $\rightarrow$
(10bb) $I \models \neg R$, (5) y semántica de $\neg$
(11bb) $I \models \perp$, (9bb), (10bb) y semántica de $\perp$.
Lo que termina este caso.

Se han examinado todos los casos y éstos siempre terminan en una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es válida. □

Nótese que la prueba del ejemplo anterior tiene la forma dada por la Figura 1. Esto es porque los casos corresponden a ramificaciones. Una **rama** del árbol es una secuencia de líneas descendientes de la raíz. Una **rama está cerrada** si contiene una contradicción: o bien $I \models \perp$ ó implícitamente $I \models \mathcal{G}$ y $I \not\models \mathcal{G}$. En caso contrario se dice que la **rama está abierta**.

Definición 17.

(1) Una línea L se dice **descendiente directo** *de una línea padre M si L está directamente abajo de L en una prueba semántica.*

(2) L es **descendiente** *de M si L es M o L es descendiente directo de M o si el padre de L es descendiente de M. Esto es*

descendiente=clausura transitiva de descendiente directo.

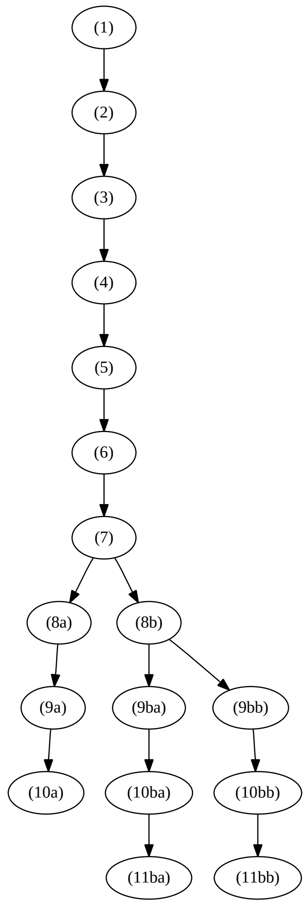

Figura 1. Árbol de prueba

(3) M es **ancestro** *de L si L es descendiente de M.*

Las reglas de prueba anteriores son suficientes para averiguar validez y satisfactibilidad; sin embargo reglas de prueba *derivadas* ó reglas de deducción hacen las pruebas más concisas. Un ejemplo es **modus ponens**:

$$\begin{array}{rcl} I & \models & \mathcal{F} \\ I & \models & \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \\ \hline I & \models & \mathcal{G} \end{array}$$

Ejemplo 18. Probar que la fórmula

$$\mathcal{F} : (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

es válida.

Demostración.

(1) $I \not\models \mathcal{F}$, hipótesis
(2) $I \models (P \to Q) \land (Q \to R)$, (1) y $\to$
(3) $I \not\models P \to R$, (1) y $\to$
(4) $I \models P$, (3) y $\to$
(5) $I \not\models R$, (3) y $\to$
(6) $I \models P \to Q$, (2) y $\land$
(7) $I \models Q \to R$, (2) y $\land$
(8) $I \models Q$, modus ponens de (4) y (6)
(9) $I \models R$, modus ponens de (7) y (8)
(10) $I \models \neg R$, (5) y $\neg$
(11) $I \models \bot$, (9), (10) y $\bot$

□

Los argumentos semánticos también se pueden usar para mostrar satisfactibilidad.

Ejemplo 19. Sea
$$\mathcal{F} : P \lor Q \to P \land Q.$$
Mostrar que $\neg\mathcal{F}$ es satisfactible.

Demostración.

(1) $I \not\models \neg\mathcal{F}$, hipótesis
(2) $I \models \mathcal{F}$, (1) y $\neg$
  (2a) $I \not\models P \lor Q$, (2) y caso de $\to$
  (3a) $I \not\models P$, (2a) y $\lor$
  (4a) $I \not\models Q$, (2a) y $\lor$
  (5a) $I \models \neg P$, (3a) y $\neg$
  (6a) $I \models \neg Q$, (4a) y $\neg$
    Podemos notar que esta rama no se cierra. De hecho, de (3a) y (4a) se obtiene que
  (7a) $I[P] = \textbf{false}$, (3a)
  (8a) $I[Q] = \textbf{false}$, (4a)
  (9a) $I : \{P \mapsto \textbf{false}, Q \mapsto \textbf{false}\}$, (7a) y (8a)

  (2b) $I \models P \land Q$, (2) y caso de $\to$
  (3b) $I \models P$, (2b) y $\land$
  (4b) $I \models Q$, (2b) y $\land$
    De nuevo esta rama no se cierra.
  (5b) $I[P] = \textbf{true}$, (3b)

(6b) $I[Q] = \mathbf{true}$, (4b)
(7b) $I : \{P \mapsto \mathbf{true}, Q \mapsto \mathbf{true}\}$, (5b) y (6b)

El razonamiento anterior muestra que: si $I \not\models \neg\mathcal{F}$ entonces $I : \{P \mapsto \mathbf{false}, Q \mapsto \mathbf{false}\}$ ó $I : \{P \mapsto \mathbf{true}, Q \mapsto \mathbf{true}\}$. Luego, razonando por contrarrecíproca, si I es diferentes de cualquiera de éstas dos asignaciones se debe de cumplir que $I \models \neg\mathcal{F}$. Por ejemplo, la asignación, $I : \{P \mapsto \mathbf{true}, Q \mapsto \mathbf{false}\}$ debe cumplir $I \models \neg\mathcal{F}$. Luego $\neg\mathcal{F}$ es satisfactible. □

Tarea 5. *En cada uno de las siguientes identifique si la fórmula es válida o no. Si es válida, pruébelo usando tablas de verdad o pruebas semánticas. Si no es válida identifique la interpretación que la falsifica. Recordar las convenciones para la precedencia de operadores y asociatividad.*

(1) $P \wedge Q \rightarrow P \rightarrow Q$

(2) $(P \rightarrow Q) \vee P \wedge \neg Q$

(3) $(P \rightarrow Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$

(4) $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R \rightarrow \neg R \rightarrow Q$

(5) $P \wedge Q \vee \neg P \vee (\neg Q \rightarrow \neg P)$

(6) $(P \rightarrow Q \rightarrow R) \rightarrow \neg R \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

(7) $(\neg R \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg R) \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R$

Definición 20. *La fórmula $\mathcal{F}_1$* **implica logicamente** *a la fórmula $\mathcal{F}_2$ si para cualquier interpretación I que cumple $I \models \mathcal{F}_1$ se obtiene $I \models \mathcal{F}_2$. En tal caso se escribe*

$$\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$$

La expresión $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$ no es una fórmula.

Teorema 1. *Sean $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ fórmulas de PL. Entonces*

$$\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2 \textit{ si y sólo si } \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \textit{ es válida.}$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$. Por demostrar que $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ es válida. Lo cual haremos razonando, como es usual, por contradicción.

(1) $I \not\models \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$, hipótesis

(2) $I \models \mathcal{F}_1$, (1) y $\rightarrow$

(3) $I \not\models \mathcal{F}_2$, (1) y $\rightarrow$

(4) $I \models \neg\mathcal{F}_2$, (3) y $\neg$

(5) $I \models \mathcal{F}_2$, (2) y definición de $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$

(6) $I \models \bot$, (4), (5) y $\bot$

Por lo tanto $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ es válida.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ es válida. Por demostrar que $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$. Para lo cual, según la definición de implicación lógica, tenemos que tomar cualquier interpretación I tal que $I \models \mathcal{F}_1$ y ahora tenemos que mostrar que $I \models \mathcal{F}_2$. Necesariamente $I \models \mathcal{F}_2$ porque en caso contrario $I \not\models \mathcal{F}_2$ y como $I \models \mathcal{F}_1$ se sigue que $I \not\models \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ según la semántica de $\to$, lo cual indicaría que $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ no es válida, lo que a su vez contradice la suposición original. $\square$

Ejemplo 21. Probar que $R \wedge (\neg R \vee P) \Rightarrow P$

Demostración. Basta con probar que $R \wedge (\neg R \vee P) \to P$ es válida.

(1) $I \not\models R \wedge (\neg R \vee P) \to P$, hipótesis

(2) $I \models R \wedge (\neg R \vee P)$, de (1) y $\to$

(3) $I \not\models P$, de (1) y $\to$

(4) $I \models R$, (2) y $\wedge$

(5) $I \models \neg R \vee P$, (2) y $\wedge$

  (6a) $I \models \neg R$, caso de (5) y $\vee$
  (7a) $I \models \bot$, (4) y (6a)

  (6b) $I \models P$, caso de (5) y $\vee$
  (7b) $I \models \neg P$, (3) y $\neg$
  (8b) $I \models \bot$, (6b) y (7b)

$\square$

Definición 22. *Dos fórmulas $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ se dicen* **logicamente equivalentes** *si para cualquier interpretación I,*

$$I \models \mathcal{F}_1 \text{ si y sólo si } I \models \mathcal{F}_2.$$

En tal caso se escribe $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$.

La expresión $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$ no es una fórmula.

Teorema 2. *Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ dos fórmulas. Entonces*

$$\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2 \text{ si y sólo si } \mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2 \text{ es válida.}$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$. Por demostrar que $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ es válida, lo cual haremos por contradicción:

(1) $I \not\models \mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$, hipótesis

  (2a) $I \models \mathcal{F}_1 \wedge \neg\mathcal{F}_2$, caso de (1) y $\leftrightarrow$
  (3a) $I \models \mathcal{F}_1$, (2a) y $\wedge$

(4a) $I \models \neg\mathcal{F}_2$, (2a) y $\wedge$
(5a) $I \models \mathcal{F}_2$, de (3a) pues $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$
(6a) $I \models \perp$, (4a), (5a)

(2b) $I \models \neg\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, caso de (2) y $\leftrightarrow$
(3b) $I \models \neg\mathcal{F}_1$, (2b) y $\wedge$
(4b) $I \models \mathcal{F}_2$, (2b) y $\wedge$
(5b) $I \models \mathcal{F}_1$, (4b) y $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$
(6b) $I \models \perp$, (3b), (5b)

Por lo tanto $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ es válida.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ es válida. Por demostrar que $\mathcal{F}_1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_2$. Sea I interpretación, entonces, por definición de la tabla de verdad de $\leftrightarrow$, $I \models \mathcal{F}_1$ ssi $I \models \mathcal{F}_2$. □

Ejemplo 23. Probar que $P \Leftrightarrow \neg\neg P$.

Demostración. Basta con checar que $P \leftrightarrow \neg\neg P$ es válida. Por contradicción:

(1) $I \not\models P \leftrightarrow \neg\neg P$, hipótesis

(2a) $I \models P \wedge \neg(\neg\neg P)$, caso de (1) y $\leftrightarrow$
(3a) $I \models P$, (2a) y $\wedge$
(4a) $I \models \neg(\neg\neg P)$, (2) y $\wedge$
(5a) $I \not\models \neg\neg P$, (4a) y $\neg$
(6a) $I \models \neg P$, (5a) y $\neg$
(7a) $I \models \perp$, (3a), (6a)

(2b) $I \models \neg P \wedge \neg\neg P$, caso de (1) y $\leftrightarrow$
(3b) $I \models \neg P$, (2b) y $\wedge$
(4b) $I \models \neg\neg P$, (2b) y $\wedge$
(5b) $I \not\models \neg P$, (4b) y $\neg$
(6b) $I \models P$, (5b) y $\neg$
(7b) $I \models \perp$, (3b), (6b)

□

Tarea 6. *Use argumentos semánticos para probar las siguientes afirmaciones:*

(1) $\top \Leftrightarrow \neg\perp$
(2) $\perp \Leftrightarrow \neg\top$
(3) $\neg\neg\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$

(4) $\mathcal{F} \wedge \top \Leftrightarrow \mathcal{F}$

(5) $\mathcal{F} \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$

(6) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$

(7) $\mathcal{F} \vee \top \Leftrightarrow \top$

(8) $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$

(9) $\mathcal{F} \rightarrow \top \Leftrightarrow \top$

(10) $\mathcal{F} \rightarrow \bot \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}$

(11) $\top \rightarrow \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$

(12) $\bot \rightarrow \mathcal{F} \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}$

(13) $\neg(\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2) \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}_1 \vee \neg\mathcal{F}_2$

(14) $\neg(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}_1 \wedge \neg\mathcal{F}_2$

(15) $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_1$

(16) $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}_2 \rightarrow \neg\mathcal{F}_1$

(17) $(\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_3) \wedge (\mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3) \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3$

(18) $\mathcal{F}_1 \Rightarrow (\mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_1)$

(19) $\mathcal{F}_1 \rightarrow (\mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3) \Rightarrow (\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2) \rightarrow (\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_3)$

(20) $\neg\mathcal{F}_2 \rightarrow \neg\mathcal{F}_1 \Rightarrow (\neg\mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_1) \rightarrow \mathcal{F}_2$

3. Sustitución

Definición 24. *Una* **sustitución** σ *es una función de fórmulas a fórmulas:*

$$\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}.$$

El **dominio** *de* σ *es*

$$\mathrm{dom}(\sigma) : \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$$

y el **rango** *de* σ *es*

$$\mathrm{range}(\sigma) : \{\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n\}.$$

La aplicación de una sustitución σ a una fórmula $\mathcal{F}$ se denota con $\mathcal{F}\sigma$ y reemplaza cada ocurrencia de la fórmula $\mathcal{F}_i$ en el dominio con la fórmula $\mathcal{G}_i$ del rango. Tales reemplazos se hacen *sólo una vez.* Si $\mathcal{F}_j$, $\mathcal{F}_k$ están en el dominio y $\mathcal{F}_k$ es subfórmula estricta de $\mathcal{F}_j$, la fórmula "grande" $\mathcal{F}_j$ es la que se reemplaza por $\mathcal{G}_j$.

$$\underbrace{\boxed{\quad\quad |\mathcal{F}_k}}_{\mathcal{F}_j} \mapsto \mathcal{G}_j$$

Ejemplo 25. Considerar la fórmula

$$\mathcal{F} : P \wedge Q \rightarrow P \vee \neg Q$$

y sustitución

$$\sigma : \{P \mapsto R, P \wedge Q \mapsto P \to Q\}$$

entonces

$$\mathcal{F}\sigma : (P \to Q) \to R \vee \neg Q$$

pero $\mathcal{F}\sigma$ **no es**:

$$(R \to Q) \to R \vee \neg Q, \quad R \wedge Q \to R \vee \neg Q.$$

Definición 26. *Una* **sustitución de variables** *es una sustitución en la cual el dominio consiste sólo de variables proposicionales.*

Definición 27. *Si $\mathcal{F}$ es una fórmula con $\mathcal{F}[\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n]$ se dice que la fórmula $\mathcal{F}$ puede tener subfórmulas $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$.*

Si $\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}$ entonces

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n]\sigma : \mathcal{F}[\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n].$$

Ejemplo 28. Si $\mathcal{F} : P \wedge Q \to P \vee \neg Q$ y sustitución $\sigma : \{P \mapsto R, P \wedge Q \mapsto P \to Q\}$ entonces $\mathcal{F}[P, P \wedge Q]$ luego $\mathcal{F}[P, P \wedge Q]\sigma : \mathcal{F}[R, P \to Q]$

Propiedad 1 (Sustitución de Formas Equivalentes)**.** *Sea σ la sustitución*

$$\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}$$

y $\mathcal{F}$ fórmula. Si para i, $\mathcal{F}_i \Leftrightarrow \mathcal{G}_i$ entonces

$$\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}\sigma.$$

Ejemplo 29. Sea $\mathcal{F} : P \to Q$. Sabemos que $P \Leftrightarrow \neg\neg P$. Entonces si hacemos la sustitución $\sigma : \{P \mapsto \neg\neg P, Q \mapsto Q\}$ entonces $F \Leftrightarrow \mathcal{F}\sigma$, esto es

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg\neg P \to Q.$$

Ejemplo 30. Sea $\mathcal{G} : (P \to Q) \to R$. Como $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ entonces para $\sigma : \{P \to Q \mapsto \neg P \vee Q\}$ se obtiene que $(P \to Q) \to R$ es equivalente a $(\neg P \vee Q) \to R$.

Propiedad 2 (Formatos Válidos)**.** *Si $\mathcal{F}$ es válida y σ alguna sustituciión de variables, entonces $\mathcal{F}\sigma$ es válida.*

Ejemplo 31. Tenemos que

$$\mathcal{F} : P \to Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$$

es válida. Entonces si P, Q son sustituidas por fórmulas $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ resulta que

$$\mathcal{F}\sigma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \leftrightarrow \neg\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$$

es válida. Es decir, para cualesquiera fórmulas

$$\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \neg\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2.$$

4. Conectivos Redundantes

Cada fórmula $\mathcal{F}$ de PL de lugar a una función de verdad (función booleana) dada por la tabla de verdad de $\mathcal{F}$, por ejemplo, $P \wedge Q$ da lugar a la función $f(x_1, x_2)$ definida por

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

El recíproco también es cierto, es decir, cada función booleana da lugar a una fórmula que la genera.

Propiedad 3. *Cada función de verdad es generada por una fórmula que involucra sólo a los conectivos $\neg, \wedge, \vee$. Más formalmente: si f es función booleana, entonces existe una fórmula $\mathcal{F}$ que sólo tiene conectivos $\neg, \wedge, \vee$ tal que*

$$I \models \mathcal{F} \text{ si y sólo si } f(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

donde $I : \{P_1 \mapsto v_1, \ldots, P_n \mapsto v_n\}$ y $P_1, \ldots, P_n$ son las letras proposicionales de $\mathcal{F}$.

Demostración. Supongamos que $f(x_1, \ldots, x_n)$ es una función de verdad, es decir tenemos una tabla del tipo:

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$f(x_1, \ldots, x_n)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

con 2^n renglones. Consideremos el i-ésimo renglón de la tabla. Ponemos:

$$\mathcal{G}_i : U_1^i \wedge U_2^i \wedge \ldots \wedge U_n^i$$

donde

$$U_j^i = \begin{cases} P_j & \text{si } x_j \text{ es 1 en el } i\text{-ésimo renglón,} \\ \neg P_j & \text{si } x_j \text{ es 0 en el } i\text{-ésimo renglón} \end{cases}$$

Nótese que cada $\mathcal{G}_i$ es verdera sólo en la asignación de valores de verdad del renglón i.

Si f es siempre 0 entonces f es generada por la fórmula

$$\mathcal{F} : P_1 \wedge \neg P_1.$$

Si f no siempre es 0 entonces podemos considerar los renglones donde f es 1: $i_1, \ldots, i_k$ y se define:

$$\mathcal{F} : \mathcal{G}_{i_1} \vee \cdots \vee \mathcal{G}_{i_k}$$

Para cada renglón i de la tabla de verdad de f pongamos I_i la asignación de valores de verdad correspondiente.

Entonces la fórmula definida $\mathcal{F}$ genera a f, pues si f es siempre 0, $\mathcal{F} : P_1 \wedge \neg P_1$ genera a $f \equiv 0$. Si f no siempre es 0, entonces si i es un renglón donde f es 0 entonces $I_i \not\models \mathcal{G}$, pues en caso contrario $I_i \models \mathcal{G}_{i_j}$ para algún j, lo que implica $i = i_j$: absurdo. Y si i es un renglón donde f es 1 entonces $i = i_j$ para algún j. Por lo que $I_i \models \mathcal{G}_{i_j}$ y entonces $I_i \models \mathcal{F}$. $\square$

Propiedad 4 (Conectivos adecuados)**.** *Sea $\mathcal{G}$ una fórmula. Entonces*

(1) Existe una fórmula $\mathcal{F}_1$ formada sólo con conectivos $\neg$ y $\vee$, que es logicamente equivalente a $\mathcal{G}$.

(2) Existe una fórmula $\mathcal{F}_2$ formada sólo con conectivos $\neg$ y $\wedge$, que es logicamente equivalente a $\mathcal{G}$.

(3) Existe una fórmula $\mathcal{F}_3$ formada sólo con conectivos $\neg$ y $\rightarrow$, que es logicamente equivalente a $\mathcal{G}$.

Demostración.

(1) Sea g la función de verdad inducida por $\mathcal{G}$. Por la Propiedad 3 existe una fórmula $\mathcal{G}_1$ formada únicamente con conectivos $\neg, \wedge, \vee$ tal que, para cualquier interpretación I

$$I \models \mathcal{G}_1 \text{ si y sólo si } g(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

donde I está relacionada con $v_1, \ldots, v_n$ como dice la mencionada Propiedad 3. Luego $\mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{G}_1$. Ahora tenemos que, para cualesquera fórmulas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ se cumple

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$$

luego podemos reeemplazar cada $\wedge$ de $\mathcal{G}_1$ siguiendo la equivalencia anterior para obtener una fórmula $\mathcal{F}_1$ formada sólo con los conectivos $\neg, \vee$ que es logicamente equivalente a $\mathcal{G}_1$, según la propiedad de sustitución de formas equivalentes. Luego $\mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{F}_1$.

(2) Similar al anterior, pero ahora hay que reeemplazar cada $\vee$ que ocurre en $\mathcal{G}_1$ siguiendo la equivalencia:

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$$

(3) Similar a los anteriores pero ahora usando,

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{B})$$

y

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg(\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{C})$$

$\square$

Esta propiedad afirma que para estudiar las fórmulas de PL basta con considerar aquellas que sólo tengan dos conectivos $\neg, \wedge$ ó $\neg, \vee$ ó $\neg, \rightarrow$. En lo que sigue sólo consideraremos fórmulas que esten formadas con los conectivos $\neg$ y $\rightarrow$.

Comienza 2do examen parcial

5. Teorías Formales

Una forma de averiguar la validez de una fórmula es, a diferencia de los métodos semánticos anteriores, usando sólo sintaxis: nada de interpretación. En lo que sigue expondremos tales ideas.

5.1. Teoría Axiomática.

Definición 32. *Una* **teoría formal** $\mathcal{S}$ *es:*

(1) *Un conjunto numerable de símbolos. Una sucesión finita de símbolos de $\mathcal{S}$ se llama* **expresión** *de $\mathcal{S}$.*

(2) *Un subconjunto de expresiones de $\mathcal{S}$ llamadas* **fórmulas bien formadas** *(FBF). Debe de haber un procedimiento para determinar cuando una expresión es una FBF.*

(3) *Un conjunto de FBF llamadas* **axiomas** *de $\mathcal{S}$. Se debe poder decidir cuando una FBF es un axioma. En tal caso $\mathcal{S}$ se llama* **teoría axiomática***.*

(4) *Un conjunto finito $\mathfrak{R}_1, \ldots \mathfrak{R}_n$ de relaciones entre FBF llamadas* **reglas de inferencia***. Si una de éstas $\mathfrak{R}_j$ relaciona varias FBF con una $\mathcal{B}$ FBF, se dice* **consecuencia directa** *de tales FBF o que $\mathcal{B}$* **se sigue** *de las FBF.*

Definición 33.

(1) *Una* **prueba** *en una teoría formal $\mathcal{S}$ es una sucesión finita de FBF, usalmente escrita de forma vertical:*

$$\begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_k \end{array}$$

tal que cada $\mathcal{B}_i$ es un axioma ó $\mathcal{B}_i$ es consecuencia directa de algunas FBF precedentes.

(2) *Un* **teorema** *en una teoría formal $\mathcal{S}$ es la última fórmula bien formada $\mathcal{B}$ en una prueba. Tal prueba se llama* **prueba de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{S}$***.*

En general no hay un procedimiento para determinar si una fórmula bien formada $\mathcal{B}$ es un teorema ó no. Si lo hay, la teoría $\mathcal{S}$ se dice **decidible**, si no lo hay la teoría se llama **indecidible**.

Definición 34. *Una FBF $\mathcal{C}$ se dice* **consecuencia** *en la teoría $\mathcal{S}$ de un conjunto Γ de FBF si y sólo si hay una secuencia*

$$\begin{array}{c}\mathcal{B}_1\\ \mathcal{B}_2\\ \vdots\\ \mathcal{B}_k\end{array}$$

de FBF tales que la última fórmula $\mathcal{B}_K$ es $\mathcal{C}$ y cada $\mathcal{B}_i$ es un axioma ó está en Γ ó $\mathcal{B}_i$ es consecuencia directa de algunas FBF que le preceden en la secuencia.

La secuencia se llama **prueba** *ó* **deducción** *de $\mathcal{C}$ a partir de Γ y se denota*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{C}$$

o bien

$$\Gamma \vdash \mathcal{C}$$

si no hay peligro de confusión sobre la teoría formal usada.

Si $\Gamma = \{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m\}$ se pone

$$\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m \vdash \mathcal{C}$$

en lugar de

$$\{\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m\} \vdash \mathcal{C}$$

y los elementos de Γ se llaman **hipótesis** o **premisas** de la prueba.

$\varnothing \vdash \mathcal{C}$ significa que existen FBF

$$\begin{array}{c}\mathcal{B}_1\\ \mathcal{B}_2\\ \vdots\\ \mathcal{B}_k\end{array}$$

tales que $\mathcal{B}_k$ es $\mathcal{C}$ y que cada $\mathcal{B}_i$ es axioma o consecuencia directa de las FBF precedentes. Luego $\mathcal{C}$ es un teorema. Así:

$$\varnothing \vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{C} \text{ si y sólo si } \mathcal{C} \text{ es un teorema}$$

en tal caso se escribe

$$\vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{C}$$

en lugar de

$$\varnothing \vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{C}.$$

5.2. La teoría formal L. Como ejemplo de los conceptos anteriores tenemos:

Definición 35. *La teoría formal L es:*

(1) *Símbolos:* $(,), \neg, \rightarrow$, *letras mayúsculas itálicas* $A, B \ldots, P, Q, \ldots$ *y éstas con subíndices* $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ *que se llaman* **letras proposicionales**.

(2) *Fórmulas bien formadas (FBF): se define recursivamente:*
   (a) *Las letras proposicionales son FBF.*
   (b) *Si* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{C}$ *son FBF entonces también lo son* $(\neg\mathcal{B})$ *y* $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$.

(3) *Axiomas: sean* $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ *FBF arbitrarias. Son axiomas:*
   A1 $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}))$
   A2 $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D})))$
   A3 $(((\neg\mathcal{C}) \rightarrow (\neg\mathcal{B})) \rightarrow (((\neg\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}))$

(4) *Reglas de deducción: sólo una,* **modus ponens**:

$$\begin{array}{l} \mathcal{B} \\ \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \\ \hline \mathcal{C} \end{array}$$

Ejemplo 36. Demostraremos que, para cualquier $\mathcal{B}$ FBF, se tiene que $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ es un teorema.

Demostración.

$$\vdash_L \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$$

Comezaremos usando el axioma A2 sustituyendo $\mathcal{C}$ por $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})$ y $\mathcal{D}$ por $\mathcal{B}$ y luego usamos axioma A1 sustituyendo $\mathcal{C}$ por $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})$:

(1) $((\mathcal{B} \rightarrow (\underbrace{(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})}_{\mathcal{C}} \rightarrow \underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \underbrace{(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})}_{\mathcal{C}}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}})))$, por A2

(2) $(\mathcal{B} \rightarrow (\underbrace{(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{B}))$, por A1

(3) $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}))$, por modus ponens (MP), (2) y (1)

(4) $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}))$, por A1

(5) $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})$, MP (4) y (3)

□

Enunciamos el ejercicio anterior como un Lema.

Lema 1. *Sea $\mathcal{B}$ una fórmula bien formada. Entonces la fórmula*

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{B})$$

es un teorema de L.

La idea principal es que las fórmulas que conocemos como válidas pueden ser deducidas como teoremas. Obsérvese que la prueba es un tanto elaborada, no es *natural*.

En el siguiente par de ejemplos, las pruebas son *naturales*.

Ejemplo 37.

$$\mathcal{B} \to \mathcal{C}, \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{D}$$

Prueba.

(1) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.

(2) $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, hip

(3) B, hip.

(4) $\mathcal{C}$, MP, (3), (1)

(5) $\mathcal{D}$, MP, (2), (4)

□

Ejemplo 38.

$$\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \mathcal{C}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{D}$$

Prueba.

(1) $\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})$, hip.

(2) $\mathcal{C}$, hip

(3) $\mathcal{B}$, hip.

(4) $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, MP, (3), (1)

(5) $\mathcal{D}$, MP (2), (4)

□

La prueba del siguiente ejemplo no es tan natural.

Ejemplo 39.

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{C}), (\mathcal{C} \to \mathcal{D}) \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{D})$$

Demostración.

(1) $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ hip.

(2) $(\mathcal{C} \to \mathcal{D})$ hip.

(3) $((\mathcal{C} \to \mathcal{D}) \to (\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})))$ Ax1

(4) $(\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}))$ MP (2), (3)
(5) $((\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D})))$ Ax2
(6) $((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D}))$ MP (4), (5)
(7) $(\mathcal{B} \to \mathcal{D})$ MP (1), (6)

$\square$

De hecho tal prueba se obtuvo con la ayuda del *teorema de la deducción*, que a continuación exponemos.

En lo que sigue usaremos la convenciones anteriores sobre paréntesis para evitar su uso innecesario.

Propiedad 5 (Teorema de la deducción)**.** *Sea* Γ *un conjunto de FBF y* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ *adicionales FBF. Entonces*

$$\textit{si} \quad \Gamma, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C} \ \textit{entonces} \ \Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}).$$

En particular, cuando $\Gamma = \varnothing$,

$$\textit{si} \quad \mathcal{B} \vdash \mathcal{C} \ \textit{entonces} \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}).$$

Demostración. Si $\Gamma, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$ entonces tenemos una prueba de $\mathcal{C}$ a partir de $\Gamma \cup \{\mathcal{B}\}$:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{C}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{C}_n \end{array}\right\} \text{axiomas o están en } \Gamma \text{ o son } \mathcal{B} \text{ o son MP de anteriores}$$

donde $\mathcal{C}_n$ es $\mathcal{C}$. Probaremos por inducción sobre j que

$$\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_j), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Caso base $j = 1$: Tenemos que checar que

$$\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1).$$

Sabemos que $\mathcal{C}_1$ es axioma o está en Γ o es $\mathcal{B}$.

- Si $\mathcal{C}_1$ es axioma o está en Γ ponemos la prueba:
  (1) $\mathcal{C}_1$, axioma o hipótesis
  (2) $(\mathcal{C}_1 \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1))$, axioma A1
  (3) $(\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1)$, MP de (1) y (2)

  $$\therefore \Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1).$$

- Si $\mathcal{C}_1$ es $\mathcal{B}$, entonces conocemos la prueba (Lema 1) de $\vdash \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, esto es $\vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_1$, luego, por definición de prueba, podemos asegurar que

  $$\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1)$$

  En cualquier caso $\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_1)$.

Paso inductivo: supongamos que $\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to C_k)$ con $k \leq j-1$. Trataremos de demostrar que

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_j.$$

Sabemos que

(1) $\mathcal{C}_j$ es axioma ó $\mathcal{C}_j \in \Gamma$ ó $\mathcal{C}_j$ es $\mathcal{B}$ ó

(2) $\mathcal{C}_j$ se sigue de modus ponens de $\mathcal{C}_\ell$ y $\mathcal{C}_m$ con $\ell < j$, $m < j$.

(1) Se puede razonar como en el caso $j = 1$ para obtener que

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_j.$$

(2) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{C}_m$ es $\mathcal{C}_\ell \to \mathcal{C}_j$. Luego podemos usar la hipótesis de inducción para obtener

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_\ell \tag{1}$$

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to (\mathcal{C}_\ell \to \mathcal{C}_j) \tag{2}$$

pero por el axioma A2,

$$\vdash (\mathcal{B} \to (\mathcal{C}_\ell \to C_j)) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}_\ell) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_j))$$

luego, por modus ponens con (2),

$$\Gamma \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_\ell) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}_j)$$

y de nuevo por modus ponens con (1),

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_j.$$

En cualquier caso

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_j.$$

Así, por inducción matemática

$$\begin{aligned} &\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_1 \\ &\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}_2 \\ &\vdots \\ &\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \underbrace{\mathcal{C}_n}_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

es decir,

$$\Gamma \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}.$$

□

Nótese que el axioma A3 no se usó en la demostración del teorema de la deducción.

Recordemos que las pruebas deben de estar formadas por axiomas o por hipótesis o por deducciones de modus ponens. Sin embargo se permiten usar propiedades anteriores, en el entendido de que lo que realmente habría que hacer para obtener la prueba completa es pegar la prueba de la propiedad usada. Por ejemplo:

Corolario 1 (Transitiva)**.**

(1) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}, \mathcal{C} \to \mathcal{D} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{D}$

(2) $\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \mathcal{C} \vdash B \to \mathcal{D}$

Demostración.

(1) Checaremos que

$$\mathcal{B} \to \mathcal{C}, \mathcal{C} \to \mathcal{D}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{D}$$

En efecto
(1) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
(2) $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, hip
(3) B, hip.
(4) $\mathcal{C}$, MP, (3), (1)
(5) $\mathcal{D}$, MP, (2), (4)
luego usamos el teorema de la deducción para obtener

$$\mathcal{B} \to \mathcal{C}, \mathcal{C} \to \mathcal{D} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{D}.$$

(2) Checaremos que

$$\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \mathcal{C}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{D}$$

En efecto:
(1) $\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})$, hip.
(2) $\mathcal{C}$, hip
(3) $\mathcal{B}$, hip.
(4) $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, MP, (3), (1)
(5) $\mathcal{D}$, MP (2), (4)
Luego, por el teorema de la deducción

$$\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{D}$$

□

La demostración de estos corolarios no es la *prueba* en la teoría formal L. Lo que es es una explicación de por qué se puede obtener una prueba en L. Esta se llama *metaprueba*. Por ejemplo del inciso (b), si seguimos esta explicación con cuidado podemos obtener la prueba[1] en L:

$$\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{D}$$

Prueba.

[1] Esta prueba fué generada usando el sistema de cómputo *Maxima* con una aplicación desarrollada por el alumno Francisco Sosa Herrera y el autor.

(1) $\mathcal{C}$ hip.
(2) $(\mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$ Ax1
(3) $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ MP (1), (2)
(4) $(\mathcal{B} \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}))$ Ax1
(5) $((\mathcal{B} \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})))$ Ax2
(6) $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}))$ Ax1
(7) $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}))$ MP (4), (5)
(8) $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})$ MP (6), (7)
(9) $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))$ hip.
(10) $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))))$ Ax1
(11) $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})))$ MP (9), (10)
(12) $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))))$ Ax2
(13) $((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})))$ MP (11), (12)
(14) $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}))$ MP (8), (13)
(15) $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D})))$ Ax2
(16) $((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}))$ MP (14), (15)
(17) $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D})$ MP (3), (16)

$\square$

Lema 2 (doble negación)**.** *Sea $\mathcal{B}$ una FBF. Los siguientes son teoremas de L.*

(a) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})$
(b) $(\mathcal{B} \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B})))$

Demostración.

(a) $\vdash ((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})$
(1) $(((\neg \underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}) \rightarrow (\neg \underbrace{(\neg\mathcal{B})}_{\mathcal{B}})) \rightarrow (((\neg \underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}) \rightarrow \underbrace{(\neg\mathcal{B})}_{\mathcal{B}}) \rightarrow \underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}))$, por axioma A3
(2) $((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B}))$, por Lema 1
(3) $(((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{B})$, por Corolario 1 (2) en (2), (1)
(4) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow ((\neg\mathcal{B}) \rightarrow (\neg(\neg\mathcal{B}))))$, por axioma A1
(5) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B})$, por Corolario 1 (1) en (4),(3)

(b) $\vdash \mathcal{B} \rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$
(1) $(((\neg\neg\neg\mathcal{B})) \rightarrow (\neg\mathcal{B})) \rightarrow (((\neg\neg\neg\mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \neg\neg\mathcal{B})))$, axioma A3
(2) $\neg\neg\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{B}$, inciso anterior
(3) $(\neg\neg\neg\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$, MP, (2), (1)

(4) $(\mathcal{B} \to (\neg\neg\neg\mathcal{B} \to \mathcal{B}))$
(5) $B \to \neg\neg\mathcal{B}$, Corolario 1 (1) de (4) y (3)

$\square$

De nuevo, las explicaciones anteriores no forman una prueba en L, sino es una metaprueba. La prueba que se asegura existe en la prueba del Lema anterior inciso (a) es:

$$\vdash \neg\neg\mathcal{B} \to \mathcal{B}$$

Prueba.

(1) $((\neg\mathcal{B}) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (\neg\mathcal{B})))$ Ax1

(2) $(((\neg\mathcal{B}) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B}))))$ Ax2

(3) $((\neg\mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})))$ Ax1

(4) $(((\neg\mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})))$ MP (1), (2)

(5) $((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B}))$ MP (3), (4)

(6) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B}))))$ Ax1

(7) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})))$ MP (5), (6)

(8) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))))$ Ax1

(9) $((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))) \to ((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))))$ Ax2

(10) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))))$ Ax1

(11) $((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))))$ MP (8), (9)

(12) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))$ MP (10), (11)

(13) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B}))$ Ax3

(14) $((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B})) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B}))))$ Ax1

(15) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B})))$ MP (13), (14)

(16) $((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B}))) \to ((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B}))))$ Ax2

(17) $((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B})))$ MP (15), (16)

(18) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B}))$ MP (12), (17)

(19) $((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B})) \to ((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to \mathcal{B})))$ Ax2

(20) $((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg\mathcal{B}))) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to \mathcal{B}))$ MP (18), (19)

(21) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))$ Ax1

(22) $(((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))) \to (((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))))$ Ax2

(23) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))$ Ax1

(24) $(((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))$ MP (21), (22)

(25) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))$ MP (23), (24)

(26) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))$ Ax1

(27) $(((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))))$ Ax1

(28) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))))$ MP (26), (27)

(29) $(((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))) \to (((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))))$ Ax2

(30) $(((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))))$ MP (28), (29)

(31) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))))$ MP (25), (30)

(32) $(((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to \mathcal{B})$ MP (7), (20)

(33) $((((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to \mathcal{B}) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to \mathcal{B})))$ Ax1

(34) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to \mathcal{B}))$ MP (32), (33)

(35) $(((\neg(\neg\mathcal{B})) \to (((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B}))) \to \mathcal{B})) \to (((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B})))$ Ax2

(36) $(((\neg(\neg\mathcal{B})) \to ((\neg\mathcal{B}) \to (\neg(\neg\mathcal{B})))) \to ((\neg(\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B}))$ MP (34), (35)

(37) $((\neg(\neg\mathcal{B})) \to \mathcal{B})$ MP (31), (36)

$\square$

Tarea 7. *Exhibir las pruebas de*

(1) $\vdash_L (\neg\mathcal{B} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{B}$

(2) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}, \mathcal{C} \to \mathcal{D} \vdash_L \mathcal{B} \to \mathcal{D}$

(3) $\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D}) \vdash_L \mathcal{C} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D})$

(4) $\vdash_L (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$

Lema 3. *Sean $\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$ fórmulas. El siguiente es un teorema en L.*

$$\neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$$

Demostración. Por el teorema de la deducción basta con probar que

$$\neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

y a su vez, basta con

$$\neg\mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$$

(1) $\neg\mathcal{B}$, hip.

(2) $\mathcal{B}$, hip.

(3) $\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B})$, Ax1,

(4) $\neg\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B})$, Ax1

(5) $\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}$, MP (2), (3)

(6) $\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}$, MP (1), (4)

(7) $(\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C})$, Ax3

(8) $(\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$, MP (6), (7)

(9) $\mathcal{C}$, MP (5), (8)

Por lo tanto

$$\neg\mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$$

y el teorema de deducción asegura $\neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, lo que a su vez implica, por el teorema de deducción, de nuevo, que

$$\vdash \neg\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}).$$

□

Lema 4 (contrarrecíproca)**.** *Sean $\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$ fórmulas. Los siguientes son teoremas en L:*

(a) $(\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$

(b) $(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B})$

Demostración.

(a)

$$\vdash (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$$

Por el teorema de la deducción basta con probar que:

$$\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

y a su vez que

$$\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}, \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}$$

(1) $\mathcal{B}$, hip.
(2) $\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B})$, Ax1
(3) $\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}$, MP (1), (2)
(4) $(\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C})$, Ax3
(5) $\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}$, hip.
(6) $(\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$, MP (5), (4)
(7) $\mathcal{C}$, MP (3), (6)

(b) Probaremos que

$$\mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash \neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}$$

(1) $(\neg\neg\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B})$, por el inciso anterior
(2) $\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{B}$, por doble negación (b)
(3) $\mathcal{C} \to \neg\neg\mathcal{C}$, por doble negación (b)
(4) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
(5) $\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{C}$, transitiva (a) de (4), (3)
(6) $\neg\neg\mathcal{B} \to \mathcal{B}$, doble negación (a)
(7) $\neg\neg\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{C}$, transitiva (6), (5)
(8) $\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}$, MP (9), (1)

entonces, por el teorema de deducción,

$$\vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}).$$

□

Lema 5. *Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ fórmulas. Entonces*

(a) $\vdash \mathcal{B} \to (\neg\mathcal{C} \to \neg(\mathcal{B} \to \mathcal{C}))$

(b) $\vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to ((\neg B \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C})$

Demostración.

(a) Por el teorema de deducción basta con probar:

$$\mathcal{B}, \neg\mathcal{C} \vdash \neg(\mathcal{B} \to \mathcal{C}).$$

Tenemos que

$$\mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash \mathcal{C} \tag{3}$$

pues

(1) B, hip.
(2) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip
(3) $\mathcal{C}$, MP (1), (2)

Podemos utilizar deducción en (3) para obtener

$$\mathcal{B} \vdash (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

y de nuevo

$$\vdash \mathcal{B} \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C})$$

luego

(1) $\mathcal{B} \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C})$, por lo anterior
(2) $((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg(\mathcal{B} \to \mathcal{C}))$, contrarrecíproca
(3) $\mathcal{B} \to (\neg\mathcal{C} \to \neg(\mathcal{B} \to \mathcal{C}))$ por transitiva en (1), (2).

(b) De nuevo, por deducción basta con probar que

$$\mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash (\neg\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

y a su vez basta con

$$\mathcal{B} \to \mathcal{C}, \neg\mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash \mathcal{C}$$

(1) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
(2) $\neg\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
(3) $(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B})$, contrarrecíproca
(4) $\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}$, MP (1), (3)
(5) $\mathcal{C} \to \neg\neg\mathcal{C}$, doble negación
(6) $\neg\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{C}$, transitiva (2), (5)
(7) $(\neg\mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{C}) \to (\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B})$, contrarecíproca
(8) $\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}$, MP (6), (7)
(9) $(\neg\mathcal{C} \to \neg\mathcal{B}) \to ((\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C})$, Ax3
(10) $(\neg\mathcal{C} \to \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$, MP (4), (9)
(11) $\mathcal{C}$, MP (8), (10)

□

La idea es que cada fórmula en L que es un teorema es una fórmula válida (tautología). Esto lo justifica el *teorema de validez* que se enuncia y se prueba más adelante. La novedad es que la válidez se puede obtener sin hacer interpretaciones. Usando los axiomas se obtienen argumentos exclusivamente sintácticos de la validez de fórmulas.

Propiedad 6. *Modus ponens preserva validez. Esto es si $\mathcal{B}$ es válida y $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es válida entonces $\mathcal{C}$ es válida.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $\mathcal{C}$ no es válida, entonces existe una interpretación I tal que:

(1) $I \not\models \mathcal{C}$, hip.
(2) $I \models \mathcal{B}$, hip
(3) $I \not\models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ semántica de $\to$ (1), (2)

(4) $I \models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.

(5) $I \models \neg(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$, semántica de $\neg$, (3)

(6) $I \models \perp$ (4), (5)

$\square$

Tarea 8. *Muestre que los axiomas A2 y A3 son válidos.*

Teorema 3 (validez)**.** *Cada teorema de L es válido.*

Demostración. Primero se demostrará que cada axioma es válido. Por ejemplo A1:

(1) $I \not\models B \to (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$, hip.

(2) $I \models \mathcal{B}$, $\to$ (1)

(3) $I \not\models (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$, $\to$ (1)

(4) $I \models \mathcal{C}$, $\to$ (3)

(5) $I \not\models \mathcal{B}$, $\to$, (3)

(6) $I \models \neg B$, $\neg$ (4)

(7) $I \models \perp$, (2) (5)

Similarmente se prueba que los axiomas A2, A3 son válidos.

Luego, como modus ponens preserva validez, cualquier fórmula que se deduzca de los axiomas en L por aplicación de una o varias veces modus ponens, resultará en una fórmula válida. Pero precisamente estos son los teoremas. $\square$

Tarea 9. *Considérese las siguientes reglas de inferencia:*

(1) Moduls tollens: de $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ y $\neg\mathcal{C}$ se infiere $\neg\mathcal{B}$

(2) Silogismo hipotético: de $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se infiere $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$

(3) Simplificación: de $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ se infiere $\mathcal{B}$; y de $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ se infiere $\mathcal{C}$

(4) Dilema constructivo: de $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, $\mathcal{D} \to \mathcal{F}$ y $\mathcal{B} \vee \mathcal{D}$ se infiere $\mathcal{C} \vee \mathcal{F}$

Mostrar que cada una de estas reglas de inferencia preserva validez.

Hay ciertos esquemas de pruebas que ayuda a automatizar el proceso de hacer demostraciones.

Caso 1 Si $\mathcal{H}_1, \ldots \mathcal{H}_s \vdash \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_s \vdash \neg\neg\mathcal{C}$

Demostración. Tenemos

$$\left.\begin{array}{c}\mathcal{B}_1\\ \vdots\\ \mathcal{B}_{k-1}\\ \mathcal{C}\end{array}\right\}\text{prueba de } \mathcal{H}_1,\ldots\mathcal{H}_s\vdash\mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}\to\neg\neg\mathcal{C}, \text{ doble negación}$$

$$\neg\neg\mathcal{C}, \mathrm{MP}$$

la cual es una prueba de $\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_s\vdash\neg\neg\mathcal{C}$. □

Caso 2 (1) Si $\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_s\vdash\neg\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_s\vdash\mathcal{C}\to\mathcal{D}$.

Demostración. Tenemos

$$\left.\begin{array}{c}\mathcal{B}_1\\ \vdots\\ \mathcal{B}_{k-1}\\ \neg\mathcal{C}\end{array}\right\}\text{prueba de } \mathcal{H}_1,\ldots\mathcal{H}_s\vdash\neg\mathcal{C}$$

$$\neg\mathcal{C}\to(\mathcal{C}\to\mathcal{D}), \text{ por Lema 3}$$

$$\mathcal{C}\to\mathcal{D}, \mathrm{MP}$$

□

(2) Si $\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_s\vdash\mathcal{D}$ entonces $\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_s\vdash\mathcal{C}\to\mathcal{D}$.

Demostración.

$$\left.\begin{array}{c}\mathcal{B}_1\\ \vdots\\ \mathcal{B}_{k-1}\\ \mathcal{D}\end{array}\right\}\text{prueba de } \mathcal{H}_1,\ldots\mathcal{H}_s\vdash\mathcal{D}$$

$$\mathcal{D}\to(\mathcal{C}\to\mathcal{D}), \text{ Ax1}$$

$$\mathcal{C}\to\mathcal{D}, \text{ MP}$$

□

(3) Si $\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_s\vdash\mathcal{C}$ y $\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_s\vdash\neg\mathcal{D}$ entonces $\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_s\vdash\neg(\mathcal{C}\to\mathcal{D})$

Demostración.

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{B}_1\\ \vdots\\ \mathcal{B}_{k-1}\\ \mathcal{C}, \quad (*)\end{array}\right\}\text{prueba de } \mathcal{H}_1,\dots\mathcal{H}_s \vdash \mathcal{C}$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{B}_1\\ \vdots\\ \mathcal{B}_{k-1}\\ \neg\mathcal{D}, \quad (**)\end{array}\right\}\text{prueba de } \mathcal{H}_1,\dots\mathcal{H}_s \vdash \neg\mathcal{D}$$

$$\mathcal{C} \to (\neg\mathcal{D} \to \neg(\mathcal{C} \to \mathcal{D})), \text{ Lema } 5(a)$$

$$\neg\mathcal{D} \to \neg(\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \text{MP}(*)$$

$$\neg(\mathcal{C} \to \mathcal{D}), \text{ MP } (**)$$

□

Ejemplo 40. $A_2, A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$

Sol. Por el caso 1, basta con probar

$$A_2, A_5 \vdash \neg A_2 \to A_5$$

y por el caso 2(2) basta con

$$A_2, A_5 \vdash A_5$$

lo cual es obvio. Recordemos que el razonamiento que acabamos de hacer es una metaprueba. Escribamos la prueba:

$$A_2, A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$$

Demostración.

(1) A_5 hip. (prueba de $A_2, A_5 \vdash A_5$)

(2) $A_5 \to (\neg A_2 \to A_5)$, Ax1

(3) $\neg A_2 \to A_5$, MP 1,2

(4) $(\neg A_2 \to A_5) \to \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$, doble negación

(5) $\neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$, MP 3,4

□

□

Tarea 10. *Pruebe:*

(1) $\neg P, \neg Q \vdash (\neg P \to \neg Q) \to (P \to Q)$

(2) $P, Q, R \vdash (\neg\neg P \to Q) \to R$

(3) $P, \neg Q \vdash \neg\neg\neg(P \to Q)$

(4) $P, Q, \neg R \vdash P \to Q \to R$

El ejemplo y la tarea anterior son parte de un teorema general.

Definición 41. *Sea $\mathcal{B}$ una fórmula, I una asignación. Se define*

$$\mathcal{B}' = \begin{cases} \mathcal{B} & si\ I \models \mathcal{B} \\ \neg\mathcal{B} & si\ I \not\models \mathcal{B} \end{cases}$$

Lema 6 (Kálmar)**.** *Sea $\mathcal{B}$ una fórmula con $B_1, \ldots, B_k$ sus letras proposicionales. Sea I una interpretación. Usando tal interpretación,*

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathcal{B}'.$$

Antes de la demostración de este lema, daremos ejemplos sobre lo que intenta decir.

Ejemplo 42. Sea $\mathcal{B}$ la fórmula $\neg(\neg A_2 \to A_5)$. Tenemos cuatro posibles interpretaciones dadas por la tabla de verdad:

	A_2	A_5	$\neg$	(	$\neg$	A_2	$\to$	A_5	)
I_1	0	0	1		1	0	0	0	
I_2	0	1	0		1	0	1	1	
I_3	1	0	0		0	1	1	0	
I_4	1	1	0		0	1	1	1	

Entonces, cada interpretación da lugar, según el Lema 6, a las siguientes:

(1) $\neg A_2, \neg A_5 \vdash \neg(\neg A_2 \to A_5)$

(2) $\neg A_2, A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$

(3) $A_2, \neg A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$

(4) $A_2, A_5 \vdash \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$

que se pueden probar, siguiendo los casos de los esquemas de pruebas anteriores:

(1) Por el caso 2(3) basta con probar que

$$\neg A_2, \neg A_5 \vdash \neg A_2 \text{ y } \neg A_2, \neg A_5 \to \neg A_5$$

lo cual es obvio. Escribamos la prueba.

(a) $\neg A_2$, Hip.

(b) $\neg A_5$, Hip.

(c) $\neg A_2 \to (\neg A_5 \to \neg(\neg A_2 \to A_5))$, por Lema 5(a),

(d) $\neg A_5 \to \neg(\neg A_2 \to A_5)$, MP (a),(c)

(e) $\neg(\neg A_2 \to A_5)$, MP (b), (d)

(2) Según el caso 1 basta con

$$\neg A_2, A_5 \vdash \neg A_2 \to A_5$$

y ahora según el caso 2(2) basta con

$$\neg A_2, A_5 \vdash A_5$$

lo cual es obvio. La prueba es:
(a) $\neg A_2$, Hip.
(b) A_5, Hip.
(c) $A_5 \to (\neg A_2 \to A_5)$, Ax1
(d) $\neg A_2 \to A_5$, MP (b),(c)
(e) $(\neg A_2 \to A_5) \to \neg\neg(A_2 \to A_5)$, doble negación
(f) $\neg\neg(A_2 \to A_5)$ MP (d),(e)

(3) Según el caso 1 basta con

$$A_2, \neg A_5 \vdash \neg A_2 \to A_5$$

y a su vez, por el caso 2(1) basta con

$$A_2, \neg A_5 \vdash \neg\neg A_2$$

y por el caso 1 basta con

$$A_2, \neg A_5 \vdash A_2$$

lo cual es obvio. Reconstruyamos la prueba:
(a) A_2, Hip.
(b) $\neg A_5$, Hip.
(c) $A_2 \to \neg\neg A_2$, doble negación
(d) $\neg\neg A_2$, MP (a), (c)
(e) $\neg\neg A_2 \to (\neg A_2 \to A_5)$, Lema 3
(f) $\neg A_2 \to A_5$, MP (d),(e)
(g) $(\neg A_2 \to A_5) \to \neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$, doble negación
(h) $\neg\neg(\neg A_2 \to A_5)$, MP (f),(g)

(4) Ver ejemplo 40

El procedimiento anterior se resume en la prueba de Lema 6:

Demostración. *de Lema 6:* Definimos $\theta(\mathcal{B})$ la complejidad de $\mathcal{B}$ como su número de conectivos, y procedemos por inducción sobre $\theta(\mathcal{B})$.

Si $\theta(\mathcal{B}) = 0$ entonces $\mathcal{B}$ es sólo una letra proposicional B_1 que tiene tabla de verdad

B_1	$\mathcal{B}$
0	0
1	1

entonces se afirma que $\mathcal{B}'_1 \vdash \mathcal{B}'$, eso es

$$\begin{array}{ll} B_1 \vdash \mathcal{B}, & \text{si } B \text{ es } \textbf{true} \\ \neg\mathcal{B}_1 \vdash \neg\mathcal{B} & \text{si } B \text{ es } \textbf{false} \end{array}$$

es decir

$$B_1 \vdash B_1$$
$$\neg B_1 \vdash \neg B_1$$

Supongamos ahora cierto el resultado para fórmulas $\mathcal{C}$ tales que $\theta(\mathcal{C}) < n = \theta(\mathcal{B})$. Por demostrar que el resultado es cierto para $\mathcal{B}$. Sea I una interpretación de $\mathcal{B}$. Tenemos un par de casos:

(1) $\mathcal{B}$ es $\neg\mathcal{C}$

(2) $\mathcal{B}$ es $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$

(1) Ahora hay un par de subcasos
  (a) $I \models \mathcal{C}$
  (b) $I \not\models \mathcal{C}$
  (a) Se sigue que $I \not\models \mathcal{B}$, luego $\mathcal{B}'$ es $\neg\neg\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ es $\mathcal{C}$. Como $\theta(\mathcal{C}) < \theta(\mathcal{B})$ e hipótesis de inducción se obtiene

$$B'_1, \ldots, B'_k \vdash \underbrace{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}$$

  luego por el esquema de prueba en el caso 1 se puede obtener

$$B'_1, \ldots, B'_k \vdash \underbrace{\neg\neg\mathcal{C}}_{\mathcal{B}'}$$

  (b) $I \models \mathcal{B}$, luego $\mathcal{B}'$ es $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}'$ es $\neg\mathcal{C}$. De nuevo, como $\mathcal{C}$ tiene menos conectivos que $\mathcal{B}$ e hipótesis de inducción,

$$B'_1, \ldots, B'_k \vdash \underbrace{\mathcal{C}'}_{\neg\mathcal{C}}$$

  pero como $\neg\mathcal{C}$ es $\mathcal{B}$,

$$B'_1, \ldots, B'_k \vdash \underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}.$$

(2) Como $\theta(\mathcal{C}), \theta(\mathcal{D}) < n$ podemos aplicar la hipótesis de inducción para obtener que

$$B'_1, \ldots, B'_k \vdash \mathcal{C}'$$
$$B'_1, \ldots, B'_k \vdash \mathcal{D}'.$$

Ahora tenemos cuatro subcasos:
  (a) $I \not\models \mathcal{C}, I \not\models \mathcal{D}$
  (b) $I \not\models \mathcal{C}, I \models \mathcal{D}$
  (c) $I \models \mathcal{C}, I \not\models \mathcal{D}$

(d) $I \models \mathcal{C}, I \models \mathcal{D}$

(a) Se sigue $I \models \mathcal{B}$, luego $\mathcal{B}'$ es $\mathcal{B}$. Como $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\mathcal{C}$, entonces, por el esquema de prueba en el caso 2(1), se sigue que

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \underbrace{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}}_{\mathcal{B}'}.$$

(b) Lo mismo que el anterior.

(c) Se sigue que $I \not\models \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}'$ es $\neg(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})$. Como $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathcal{C}$ y $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\mathcal{D}$, podemos usar el esquema de prueba en el caso 2(3) para obtener

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \underbrace{\neg(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})}_{\mathcal{B}'}.$$

(d) Ahora tenemos $I \models \mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{B}'$ es $\mathcal{B}$. Como $B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathcal{D}$, podemos usar el esquema de prueba del caso 2(1) para obtener

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \underbrace{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}}_{\mathcal{B}'}.$$

□

Definición 43. *Si $\mathcal{B}$ es válida se escribe $\models \mathcal{B}$.*

Teorema 4 (Completez)**.** *Si $\models \mathcal{B}$ entonces $\vdash \mathcal{B}$.*

Demostración. Sean $B_1, \ldots, B_k$ las letras proposicionales de $\mathcal{B}$. Por el lema de Kálmar (Lema 6), tenemos que para cualquier I interpretación de $\mathcal{B}$, se cumple

$$B_1', \ldots, B_k' \vdash \mathcal{B}$$

pues $\mathcal{B}$ es válida. Sea J una asignación en las letras proposicionales $B_1, \ldots, B_{k-1}$, que acompletamos a asignaciones I_0, I_1 de $\mathcal{B}$ definiendo $I_0[B_k] =$ **false** y $I_1[B_k] =$ **true**. Luego, usando I_1, I_0 se obtienen $B_1', \ldots, B_{k-1}', B_k \vdash \mathcal{B}$ y $B_1', \ldots, B_{k-1}', \neg B_k \vdash \mathcal{B}$, entonces

(1) $B_1', \ldots, B_{k-1}' \vdash B_k \rightarrow \mathcal{B}$, deducción

(2) $B_1', \ldots, B_{k-1}' \vdash \neg B_k \rightarrow \mathcal{B}$

(3) $(B_k \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\neg \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B})$, Lema 5(b).

(4) $(\neg B_k \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$, MP 1,3

(5) $\mathcal{B}$, MP 2,4

esto es,

$$B_1', \ldots B_{k-1}' \vdash \mathcal{B}.$$

Hemos eliminado una hipótesis para probar $\mathcal{B}$. Similarmente podemos eliminar otras, esto es, $B_1', \ldots B_{k-2}' \vdash \mathcal{B}, \ldots, B_1' \vdash \mathcal{B}$ y finalmente $\vdash \mathcal{B}$. □

Corolario 2. *No existe una fórmula $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}$ y $\neg\mathcal{B}$ sean ambas teoremas (esto se llama consistencia de la teoría L).*

Demostración. Si $\vdash \mathcal{B}$ y $\vdash \neg\mathcal{B}$, entonces, por el teorema de validez $\models \mathcal{B}$ y $\models \neg\mathcal{B}$, esto es, la tabla de verdad de $\mathcal{B}$ consiste de sólo 1's y también la de $\neg\mathcal{B}$, lo cual es absurdo. □

6. Independencia de los axiomas de L

Definición 44. *Sea Y un subconjunto de axiomas de una teoría. El conjunto Y se dice independiente si no existe una fórmula $\mathcal{F} \in Y$ tal que $\mathcal{F}$ puede ser deducida por medio de las reglas de inferencia de los axiomas de $Y \backslash \{\mathcal{F}\}$.*

Propiedad 7. *El conjunto de axiomas A1, A2, A3 es independiente.*

Demostración. Considérese las siguientes tablas de verdad exóticas (lógica multivaluada), en donde permitiremos tres valores de verdad: 0, 1 y 2;

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Sea $\mathcal{B}$ una fórmula. Si bajo cualquier de estas asignaciones $\mathcal{B}$ resulta siempre 0 entonces llamaremos a $\mathcal{B}$ *selecta*.

Afirmación: Modus ponens preserva selección.

Dem. de afirmación. Supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son selectas. Por demostrar que $\mathcal{C}$ es selecta. Si $\mathcal{C}$ no es selecta, entonces existe una asignación multivaluada I tal que $\mathcal{C}$ es 1 ó 2. Si $\mathcal{C}$ es 1, entonces examinando la tabla de verdad de $\to$ resulta que $\mathcal{B}$ es 2: imposible, pues $\mathcal{B}$ es por hipótesis selecta. Mientras que si $\mathcal{C}$ es 2, de nuevo, por la tabla de verdad, resulta $\mathcal{B}$ es 1 ó 2: imposible, pues $\mathcal{B}$ es selecta. Por tanto $\mathcal{C}$ es selecta. □

Ahora, el axioma A1 en letras proposicionales, no es selecta porque si $I : \{B \mapsto 0, \mathcal{C} \mapsto 1\}$ entonces $B \to (C \to B)$ es 2. Sin embargo, los axiomas A2 y A3 son selectas pues

$(\ \mathcal{B}$	$\to$	$(\mathcal{C}$	$\to$	$\mathcal{D}))$	$\to$	$(\ (\mathcal{B}\to\mathcal{C})$	$\to$	$(\mathcal{B}\to\mathcal{D})\ )$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0	2	0	2
2	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2	1	2	0	0	2	0	0
1	0	1	2	0	0	2	0	2
2	0	1	2	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	2	0	0
1	2	2	0	0	0	0	2	2
2	0	2	0	0	0	0	0	0
0	2	0	2	1	0	0	2	2
1	0	0	2	1	0	2	0	2
2	0	0	2	1	0	0	0	0
0	2	1	2	1	0	2	0	2
1	0	1	2	1	0	2	0	2
2	0	0	2	1	0	0	0	0
0	0	2	0	1	0	2	0	2
1	2	2	0	1	0	0	2	2
2	0	2	0	1	0	0	0	0
0	2	0	2	2	0	0	2	2
1	0	0	2	2	0	2	0	0
2	0	0	2	2	0	0	0	0
0	0	1	0	2	0	2	0	2
1	2	1	0	2	0	2	0	0
2	0	1	0	2	0	0	0	0
0	0	2	0	2	0	2	0	2
1	2	2	0	2	0	0	0	0
2	0	2	0	2	0	0	0	0

Luego, $A2$ es selecta. Similarmente $A3$ es selecta.

Luego $A1$ no puede ser deducida por modus ponens de $A2$, $A3$. Es decir $A1$ es independiente de $A2, A3$.

Ahora considérese las tablas de verdad:

A	$\neg A$
0	1
1	0
2	1

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	1
1	2	0
2	2	0

Llamaremos a una fórmula $\mathcal{B}$, *grotesca* si siempre toma el valor de verdad 0.

Afirmación: Modus ponens preserva lo grotesco.

Dem. afirmación. Supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son grotescas. Probaremos por contradiccón que $\mathcal{C}$ es grotesca. Supongamos que $\mathcal{C}$ es NO es grotesca. Entonces existe una asignación donde $\mathcal{C}$ es 1 ó 2.

Si $\mathcal{C}$ es 1 entonces, por la tabla de verdad de $\to$, $\mathcal{B}$ es 2: contradicción.

Si $\mathcal{C}$ es 2 entonces $\mathcal{B}$ es 1 ó 2: contradicción.

$\square$

Un cálculo ditecto muestra que $A1$ y $A3$ son grotescas. Luego todas las deducciones de éstas. Pero $A2$ no es grotesca: pues para

$$I : \{B \mapsto 0, C \mapsto 0, D \mapsto 1\}$$

se obtiene que $A2$ es 2:

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{B}_{0} \to \underbrace{(\underbrace{C}_{0} \to \underbrace{D}_{1})}_{2})}_{1} \to \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{B}_{0} \to \underbrace{C}_{0})}_{0} \to \underbrace{(\underbrace{B}_{0} \to \underbrace{D}_{1})}_{2})}_{1}}_{2}$$

Así, $A2$ no puede ser deducido de $A1$ y $A3$.

Finalmente: la independencia de $A3$. Con las tablas de verdad normales definiremos, para $\mathcal{B}$ una fórmula y $h(\mathcal{B})$ la fórmula tomada de $\mathcal{B}$ eliminando los símbolos negación: $\mathcal{B}$ se llama *super* si $h(\mathcal{B})$ es tautología.

Nótese que $h(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ es $h(\mathcal{B}) \to h(\mathcal{C})$.

Afirmación: Modus ponens preserva superioridad.

Dem. afirmación.

(1) $\mathcal{B}$ super, hip.

(2) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ super, hip.

(3) $h(\mathcal{B})$ tautología, (1)

(4) $h(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ tautología (2)

(5) $h(\mathcal{B}) \to h(\mathcal{C})$ es tautología, de (4)

(6) $h(\mathcal{C})$ es tautología, de (3), (5), pues modus ponens preserva validez,

(7) $\mathcal{C}$ es super, por definición de (6).

□

Así cada fórmula derivable de $A1$, $A2$ y modus ponens es super. Pero $A3$ no es super: $h((\neg C \to \neg B) \to ((\neg C \to B) \to C))$ es $(C \to B) \to ((C \to B) \to C)$ la cual no es una tautología (póngase $I : \{C \mapsto 0, B \mapsto 0\}$). □

7. Otras teorías L_i

Hay otras teorías que explican la lógica proposicional.

7.1. L_1**.** En la teoría L_1 sólo hay dos conectivos *primitivos*: $\vee, \neg$, sin embargo se usa $\to$ como una abreviatura: $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es $\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Los siguientes son esquemas de axiomas:

(1) $\mathcal{B} \vee \mathcal{B} \to \mathcal{B}$

(2) $\mathcal{B} \to \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$

(3) $\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \to \mathcal{C} \vee \mathcal{B}$

(4) $(\mathcal{C} \to \mathcal{D}) \to ((\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \vee \mathcal{D}))$

La regla de inferencia es modus ponens.

Tarea 11. *Pruebe que*

(1) $\mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash_{L_1} \mathcal{D} \vee \mathcal{B} \to \mathcal{D} \vee \mathcal{C}$

(2) $\vdash_{L_1} \mathcal{B} \to \mathcal{B}$

(3) $\vdash_{L_1} \mathcal{B} \to \neg\neg\mathcal{B}$

(4) $\vdash_{L_1} \neg\neg\mathcal{B} \to \mathcal{B}$

7.2. L_2**.** Los conectivos primitivos son $\wedge, \neg$, $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es una abreviatura para $\neg(\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C})$. Los axiomas son

(1) $\mathcal{B} \to (\mathcal{B} \wedge \mathcal{B})$

(2) $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \to \mathcal{B}$

(3) $(\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\neg(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \to \neg(\mathcal{D} \wedge \mathcal{B}))$

La única regla de inferencia es modus ponens.

8. Sistema G' de Gentzen

En esta sección en lugar de escribir $\to$ pondremos $\supset$. El sistema G' de Gentzen es otra axiomatización para la lógica proposicional. Se puede decir que es la formalización de las pruebas semánticas de validez por contradicción. Recordemos este procedimiento.

Ejemplo 45. Sea $\mathcal{B}$ la fórmula

$$\mathcal{B} : (P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$$

Decidir si $\mathcal{B}$ es válida o no.

Sol. La idea es falsificar $\mathcal{B}$ y averiguar si esto es posible. Pero ahora usaremos parejas formadas por conjuntos de fórmulas. El primer conjunto estará formada por fórmulas válidas y el segundo conjunto de fórmulas falsas:

$$(\underbrace{\{\ldots\}}_{\textbf{true}}, \underbrace{\{\ldots\}}_{\textbf{false}}).$$

Comenzamos poniendo:

$$(\{\}, \{(P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)\})$$

es decir, comenzamos suponiendo $\mathcal{B}$ es **false**. Pero esto ocurre sólo cuando $P \supset Q$ es **true** y $\neg Q \supset \neg P$ **false**. Por lo que ponemos

$$(\{P \supset Q\}, \{\neg Q \supset \neg P\})$$

pero $P \supset Q$ es **true** sólo cuando P es **false** ó Q es **true**. Escribimos:

$$(\{\}, \{P, \neg Q \supset \neg P\}) \text{ ó } (\{Q\}, \{\neg Q \supset \neg P\})$$

pero $\neg Q \supset \neg P$ es **false** sólo cuando $\neg Q$ es **true** y $\neg P$ es **false**:

$$(\{\neg Q\}, \{P, \neg P\}) \text{ ó } (\{Q, \neg Q\}, \{\neg P\})$$

La siguiente deducción debe de ser obvia:

$$(\{P\}, \{P, Q\}) \text{ ó } (\{Q, P\}, \{Q\}).$$

Nótese que en el primer caso se obtiene que P es **true** y **false** lo cual es una contradicción. Y en el segundo Q es **true** y **false** también una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es válida. $\square$

De hecho las deducciones anteriores se acostumbran denotar como:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\{P\}, \{P, Q\})}{(\{\neg Q\}, \{P, \neg P\})}}{(\{\}, \{P, \neg Q \supset \neg P\})} \qquad \dfrac{\dfrac{(\{Q, P\}, \{Q\})}{(\{Q, \neg Q\}, \{\neg P\})}}{(\{Q\}, \{\neg Q \supset \neg P\})}}{\dfrac{(\{P \supset Q\}, \{\neg Q \supset \neg P\})}{(\{\}, \{(P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)\})}}$$

donde las deducciones se colocan de abajo hacia arriba. Este árbol se llama *árbol de deducción*, y las parejas usadas se llaman *secuentes*.

Definición 46. *Un* **secuente** *es una pareja* (Γ, Δ) *de conjuntos finitos de fórmulas (vacíos quizá):*

$$\Gamma = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$$
$$\Delta = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$$

El conjunto Γ *se llama* **antecedente** *y* Δ **sucedente**.

Notación: En lugar de escribir (Γ, Δ) se escribe $\Gamma \to \Delta$. Y en lugar de $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$ se escribe $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$:

$$\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m \to \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$$

es un secuente. Si $\Gamma = \varnothing$ se pone $\to \Delta$; si $\Delta = \varnothing$ se pone $\Gamma \to$, y si $\Gamma = \Delta = \varnothing$ se pone $\to$ que se llama **secuente inconsistente**.

Definición 47. *El* **sistema de Gentzen** G' *es una teoría formal con fórmulas bien formadas con conectivos* $\wedge, \vee, \neg, \supset$ *junto con los secuentes.*

- *Los axiomas son secuentes:* $\Gamma \to \Delta$ *tal que* $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$.
- *Las reglas de inferencia son:*

(1) *(a)*

$$\frac{\Gamma, \mathcal{B}, \mathcal{C}\Delta \to \Lambda}{\Gamma, \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}(\wedge\text{: izquierda})$$

(b)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B}, \Lambda \quad \Gamma \to \Delta, \mathcal{C}, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}, \Lambda}(\wedge\text{: derecha})$$

(2) *(a)*

$$\frac{\Gamma, \mathcal{B}, \Delta \to \Lambda \quad \Gamma, \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}(\vee\text{: izquierda})$$

(b)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \Lambda}(\vee\text{: derecha})$$

(3) *(a)*

$$\frac{\Gamma, \Delta \to \mathcal{B}, \Lambda \quad \Gamma, \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \mathcal{B} \supset \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}(\supset\text{: izquierda})$$

(b)

$$\frac{\mathcal{B}, \Gamma \to \mathcal{C}, \Delta, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B} \supset \mathcal{C}, \Lambda}(\supset\text{: derecha})$$

(4) *(a)*

$$\frac{\Gamma, \Delta \rightarrow \mathcal{B}, \Lambda}{\Gamma, \neg\mathcal{B}, \Delta \rightarrow \Lambda}(\neg\text{: izquierda})$$

(b)

$$\frac{\mathcal{B}, \Gamma \rightarrow \Delta, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg\mathcal{B}, \Lambda}(\ \neg\text{: derecha})$$

Cada regla consiste de dos o tres secuentes: el o los superiores se llaman **premisas** y el inferior **conclusión**.

Para cada regla, la proposición a la cual se le aplica la regla se llama **fórmula principal**; las proposiciones que permanecen sin cambio se llaman **fórmulas extras**.

Ejemplo 48. De $\supset$ izquierda:

$$\frac{\overbrace{\mathcal{B}}^{\text{lateral}}, \overbrace{\mathcal{C}}^{\text{lateral}} \rightarrow P, \mathcal{D} \quad Q, \overbrace{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{\text{laterales}} \rightarrow \overbrace{\mathcal{D}}^{\text{lateral}}}{\underbrace{\mathcal{B}}_{\text{lateral}}, \underbrace{P \supset Q}_{\text{fórmula principal}}, \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{lateral}} \rightarrow \underbrace{\mathcal{D}}_{\text{lateral}}}$$

Cada regla de inferencia puede ser representada como una árbol:

dos nodos: si hay sólo una premisa ($\wedge$ izquierda, $\vee$ derecha, $\supset$ derecha, $\neg$ izquierda y derecha):

$$\begin{array}{c} s_1 \\ | \\ s_2 \end{array}$$

tres nodos: si hay dos premisas ($\wedge$ derecha, $\vee$ izquierda, $\supset$ izquierda):

$$\begin{array}{ccc} s_1 & & s_2 \\ \backslash & & / \\ & s_3 & \end{array}$$

Ejemplo 49.

$$\vdash_{G'} \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B}$$

Demostración.

$$\begin{array}{ll} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} & \text{axioma} \\ \hline \rightarrow \mathcal{B} \supset \mathcal{B} & \supset\text{: der.} \end{array}$$

□

Ejemplo 50.

$$\vdash_{G'} \rightarrow \neg\neg\mathcal{B} \supset \mathcal{B}$$

Demostración.

$$\begin{array}{cl} \mathcal{B} \to \mathcal{B} & \text{axioma} \\ \hline \to \neg\mathcal{B}, \mathcal{B} & \neg \text{ derecha} \\ \hline \neg\neg\mathcal{B} \to \mathcal{B} & \neg \text{ izquierda} \\ \hline \to \neg\neg\mathcal{B} \supset \mathcal{B} & \supset \text{ derecha} \end{array}$$

□

Tarea 12. *De árboles de prueba para las siguientes fórmulas válidas:*

(1) $A \supset (\mathcal{B} \supset A)$
(2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
(3) $A \supset (B \supset (A \wedge B))$
(4) $A \supset A \vee B$
(5) $B \supset (A \vee B)$
(6) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
(7) $(A \wedge B) \supset A$
(8) $(A \wedge B) \supset B$
(9) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C))$
(10) $B \supset \neg\neg B$

Definición 51. *Decimos que el secuente $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m \to \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ es* **falsificable** *si existe una interpretación I tal que*

$$I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \wedge (\neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n),$$

y decimos que el secuente es **válido** *si para toda interpretación I se cumple*

$$I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (\mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$$

en tal caso se pone

$$\models \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m \to \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n.$$

Nótese en la definición, que si $m = 0$, el secuente $\to \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ es falsificable si existe una valuación tal que $I \models \neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n$, es decir, si $\neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n$ es satisfactible, y recíprocamente:

$\to \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ es falsificable si y sólo si $\neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n$ es satisfactible.

Propiedad 8. *El secuente $\Gamma \to \Delta$ es válido si y sólo si no es falsificable.*

Demostración. Sean $\Gamma = \{\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m\}$, $\Delta = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n\}$.

- Supongamos que $\models \Gamma \to \Delta$. Por demostrar que $\Gamma \to \Delta$ no es falsificable. Supongamos lo contrario: entonces existe I tal que
  (1) $I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \wedge (\neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n)$, por definición de falsificable,
  (2) $I \models \mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m$, de (1) y semántica de $\wedge$,

(3) $I \models \neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n$, de (1) y semántica de $\wedge$,
(4) $I \models \neg(C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$, de (3) y DeMorgan,
(5) $I \not\models C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n$, de (4) y semántica de $\neg$
(6) $I \not\models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$, de (2), (5) y semántica de $\supset$,
(7) $I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$, pues $\Gamma \to \Delta$ es válido y definición,
(8) $I \models \perp$, de (6), (7).

$$\therefore \Gamma \to \Delta \text{ no es falsificable.}$$

- Recíprocamente, supongamos que $\Gamma \to \Delta$ no es falsificable. Entonces, por definición, para toda interpretación I ocurre que
  (1) $I \not\models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \wedge (\neg\mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{C}_n)$.
  (2) $I \not\models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \wedge \neg(C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$, por DeMorgan
  (2a) $I \not\models \mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m$, caso de (2)
  (3a) $I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (\mathcal{C}_1 \vee \ldots \mathcal{C}_n)$, (2a) y semántica de $\supset$
  (2b) $I \not\models \neg(C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n)$, caso de (2)
  (3b) $I \models C_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n$
  (4b) $I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (\mathcal{C}_1 \vee \ldots \mathcal{C}_n)$, (3b) y semántica de $\supset$
  En cualquier caso ((3a) y (4b)) se obtiene que $I \models (\mathcal{B}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{B}_m) \supset (\mathcal{C}_1 \vee \ldots \mathcal{C}_n)$, luego, por definición, $I \models \Gamma \to \Delta$, para cualquier I. Esto es, $\Gamma \to \Delta$ es válido.

$\square$

Lema 7. *En cada regla de inferencia de G', una interpretación I falsifica al secuente que aparece en la conclusión si y sólo si I falsifica a algún secuente de las premisas.*

Demostración. Tenemos que checar regla por regla. Por ejemplo en ($\supset$: izq):

$$\frac{\Gamma, \Delta \to \mathcal{B}, \Lambda \quad \Gamma, \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \mathcal{B} \supset \mathcal{C}, \Delta \to \Lambda} (\supset\text{: izquierda})$$

Sea I una interpretación tal que falsifica al secuente de la conclusión:

$$\underbrace{\Gamma}_{\{\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n\}}, \mathcal{B} \supset \mathcal{C}, \underbrace{\Delta}_{\{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_m\}} \to \underbrace{\Lambda}_{\{\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_s\}}$$

ssi, por definición,

$$I \models \mathcal{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}_n \wedge (\mathcal{B} \supset \mathcal{C}) \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m \wedge \neg\mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{L}_s$$

ssi

(4) $\qquad I \models \mathcal{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}_n$

(5) $\qquad I \models \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m$

(6) $\qquad l \models \neg\mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{L}_s$

(7) $\qquad I \models \mathcal{B} \supset \mathcal{C}$

luego de (7) se tienen dos casos:

(1) $I \not\models \mathcal{B}$

(2) $I \models \mathcal{C}$

(1) Si $I \not\models \mathcal{B}$ entonces, de (4),(5),(6) se sigue que

$$I \models \mathcal{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}_n \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m \wedge \neg\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{L}_s$$

es decir I hace falsificable a $\Gamma, \Delta \to \mathcal{B}, \Lambda$.

(2) Si $I \models \mathcal{C}$ entonces,

$$I \models \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}_n \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m \wedge \neg\mathcal{L}_1 \wedge \ldots \wedge \neg\mathcal{L}_s$$

es decir, I hace falsificable a $\mathcal{C}, \Gamma, \Delta \to \Lambda$.

Los casos restantes son similares. $\square$

Definición 52.

(1) Un **árbol de prueba** *es un árbol cuyas hojas son axiomas.*

(2) Si se tiene un árbol de prueba, la etiqueta de la raíz se llama **conclusión**.

(3) Un secuente $\Gamma \to \Delta$ se dice **demostrable** *si existe un árbol de prueba del cual es conclusión: en tal caso se pone $\vdash \Gamma \to \Delta$.*

Ejemplo 53. Muestre que el secuente

$$\to (P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$$

es demostrable.

Sol.

$$\vdash \to (P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$$

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$P, \neg Q \to P$}
\RightLabel{$\neg$:der.}
\UnaryInfC{$\neg Q \to P, \neg P$}
\RightLabel{$\supset$:der.}
\UnaryInfC{$\to P, \neg Q \supset \neg P$}
\AxiomC{$Q \to Q, \neg P$}
\RightLabel{$\neg$:izq.}
\UnaryInfC{$\neg Q, Q \to \neg P$}
\RightLabel{$\supset$:der.}
\UnaryInfC{$Q \to \neg Q \supset \neg P$}
\RightLabel{$\supset$:izq.}
\BinaryInfC{$P \supset Q \to \neg Q \supset \neg P$}
\RightLabel{$\supset$:der.}
\UnaryInfC{$\to (P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$}
\end{prooftree}$$

$\square$

Definición 54. *Un árbol de deducción tal que alguna hoja está etiquetada con el secuente* $\Gamma \to \Delta$ *donde* Γ *y* Δ *consisten de letras proposicionales no comunes se llama* **árbol de contraejemplo***.*

Ejemplo 55.

$$\dfrac{\dfrac{P \to Q}{\to P \supset Q}\;\supset:\text{der.} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{Q \to P}{\neg P, Q \to}\;\neg:\text{izq.}}{\neg P \to \neg Q}\;\neg:\text{der.}}{\to \neg P \supset \neg Q}\;\supset:\text{der.}}{\to (P \supset Q) \wedge (\neg P \supset \neg Q)}\;\wedge:\text{der.}$$

es un árbol de contraejemplo. Esto significa que cuando (P es **true** y Q es **false**) ó (Q es **true** y P es **false**) se obtiene que $(P \supset Q) \wedge (\neg P \to \neg Q)$ es **false**.

Lema 8. *Cada axioma de* G' *es válido.*

Demostración. Sea $\Gamma \to \Delta$ un axioma, entonces

$$\Gamma = \{\ldots, \mathcal{C}_i, \mathcal{B}, \mathcal{C}_{i+1}, \ldots\}, \quad \Delta = \{\ldots, \mathcal{D}_j, \mathcal{B}, \mathcal{D}_{j+1}, \ldots\}.$$

Tenemos que probar que $\Gamma \to \Delta$ es válido. Supongamos lo contrario, es decir, que, según Propiedad 8, $\Gamma \to \Delta$ es falsificable. Luego existe I interpretación tal que

$$I \models (\ldots \wedge \mathcal{C}_i \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}_{i+1} \wedge \ldots) \wedge (\ldots \wedge \neg\mathcal{D}_j \wedge \neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{D}_{j+1} \wedge \ldots)$$

lo que implica que

$$I \models \mathcal{B} \text{ y } I \models \neg\mathcal{B}.$$

lo cual es contradictorio. Por o tanto $\Gamma \to \Delta$ no es falsificable y así, según Propiedad 8 se obtiene que $\Gamma \to \Delta$ es válida. □

Teorema 5 (Validez)**.** *Si* $\vdash_{G'} \Gamma \to \Delta$ *entonces* $\models_{G'} \Gamma \to \Delta$.

Demostración. Si $\vdash_{G'} \Gamma \to \Delta$ entonces $\Gamma \to \Delta$ es raíz de un árbol de prueba cuyas hojas son axiomas; luego, como los axiomas son válidos según Lema 8, luego los consecuentes de tales son válidos, según Lema 7 y por tanto la raíz $\Gamma \to \Delta$ es válido. □

Después se demostrará el recíproco de éste teorema (completez), es decir, que sólo los secuentes válidos son demostrables. Resulta que en G' se puede averiguar, del árbol de deducciones, si un secuente es válido (demostrable) o no: en el primer caso se obtiene una prueba, en el segundo se obtienen los contraejemplos.

Ejemplo 56. Averiguar si el secuente es demostrable:

$$P \wedge \neg Q, P \supset Q, T \supset R, P \wedge R \to T$$

Sol. Calculamos el árbol de deducciones:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P,Q,T\supset R,P\wedge R\to T,Q}^{\text{axioma: hoja terminada}} \qquad \dfrac{\dfrac{P,P,P,R\to T,T,Q}{P,P,P\wedge R\to T,T,Q}\wedge:\text{izq.} \qquad \dfrac{R,P,P,P,R\to T,Q}{R,P,P,P\wedge R\to T,Q}\wedge:\text{izq.}}{P,P,T\supset R,P\wedge R\to T,Q}\supset:\text{izq.}}{P,P\supset Q,T\supset R,P\wedge R\to T,Q}\supset:\text{izq.}}{P,\neg Q,P\supset Q,T\supset R,P\wedge R\to T}\neg:\text{izq.}}{P\wedge\neg Q,P\supset Q,T\supset R,P\wedge R\to T}\wedge:\text{izq.}
$$

Este árbol indica que el secuente no es demostrable, pues si P,R son **true** y T,Q son **false** entonces el secuente es falso. □

Los árboles de deducción del tipo del ejemplo anterior se llaman *árboles de contraejemplo*. Sólo hay dos tipos de árboles: de prueba o de contradicción.

Definición 57. *Una hoja se llama* **terminada** *si está etiquetada por un axioma o por un secuente $\Gamma\to\Delta$ donde Γ y Δ consisten de letras proposicionales no comunes.*

Propiedad 9. *Sea $\mathfrak{S}: P_1,\dots,P_n\to Q_1,\dots,Q_n$ un secuente formado sólo por letras proposionales $P_1,\dots,P_n,Q_1\dots,Q_m$. Entonces $\mathfrak{S}$ es válido si y sólo si es un axioma.*

Demostración. Por Lema 8 sabemos que si $\mathfrak{S}$ es axioma entonces $\models\mathfrak{S}$. Recíprocamente, supongamos que $\models\mathfrak{S}$ entonces, por definición para toda I interpretación se cumple

$$I\models(P_1\wedge\ldots\wedge P_n)\supset(Q_1\vee\ldots\vee Q_m) \tag{8}$$

Si $\{P_1,\dots,P_n\}\cap\{Q_1,\dots,Q_m\}=\varnothing$ entonces podemos considerar la interpretación

$$I:\{P_1\mapsto\textbf{true},\dots,P_n\mapsto\textbf{true},Q_1\mapsto\textbf{false},\dots,Q_m\mapsto\textbf{false}\}$$

que cumple

$$I\not\models(P_1\wedge\ldots\wedge P_n)\supset(Q_1\vee\ldots\vee Q_m)$$

lo que contradice (8). Por tanto $\{P_1,\dots,P_n\}\cap\{Q_1,\dots,Q_m\}\neq\varnothing$ lo que implica que $\mathfrak{S}$ es un axioma.

□

Corolario 3 (Completez)**.** *Si $\Delta\to\Delta$ es válido entonces es demostrable, es decir: si $\models\Gamma\to\Delta$ entonces $\vdash\Gamma\to\Delta$.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ es una fórmula de la lógica proposicional se define su *complejidad* como el número de conectivos que tiene: $\Theta(\mathcal{C})$. Si

$$\mathfrak{S}:\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_m\to\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_n$$

es un secuente, se define su complejidad como

$$\Theta(\mathfrak{S}) = \Theta(\mathcal{B}_1) + \cdots + \Theta(\mathcal{B}_m) + \Theta(\mathcal{C}_1) + \cdots + \Theta(\mathcal{C}_n).$$

Nótese que la aplicación de reglas de inferencia aumenta la complejidad de secuentes (de arriba hacia abajo):

$$\frac{\mathfrak{S}_1 \qquad \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_3} \qquad \Theta(\mathfrak{S}_3) > \Theta(\mathfrak{S}_1), \Theta(\mathfrak{S}_2)$$

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2} \qquad \Theta(\mathfrak{S}_2) > \Theta(\mathfrak{S}_1)$$

Luego, si tenemos un secuente $\mathfrak{S} : \Gamma \to \Delta$ válido, le aplicamos los procedimientos anteriores para buscar su prueba (árbol de deducciones) entonces, su complejidad va dismuniyendo (de abajo hacia arriba). El procedimiento va a terminar en cada rama cuando tengamos complejidad cero que corresponde a secuentes formados por sólo por letras proposicionales (no conectivos). Luego tenemos un árbol de prueba con hojas formadas por secuentes con sólo letras proposicionales. Como comenzamos con $\mathfrak{S}$ válido y las reglas de inferencia conservan validez (y falsificación) las hojas tienen que ser válidas, luego estas hojas son axiomas y el árbol de deducciones es un árbol de prueba. □

8.1. Secuentes y formas normales. Se pueden utilizar secuentes para calcular formas normales disyuntivas y conjuntivas.

Definición 58.

(1) Una **literal** *es una letra proposicional o la negación de una letra proposicional.*

(2) Una fórmula de la lógica proposicional $\mathcal{C}$ está en **forma normal conjuntiva** *(FNC) si es la conjunción de disyuntivas de literales.*

(3) La **forma normal disyuntiva** *(FND) es la dual de la forma normal conjuntiva.*

Corolario 4. *Si $\mathcal{C}$ es una fórmula, entonces existe $\mathcal{C}'$ una forma normal conjuntiva tal que $\mathcal{C}'$ es logicamente equivalente a $\mathcal{C}$.*

En lugar de dar la demostración de este corolario ejemplificaremos el procedimiento del cálculo de tal forma normal.

Ejemplo 59. Encontrar la forma normal conjuntiva de

$$(\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S)$$

Sol. Consideramos la fórmula en el secuente $\to (\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S)$ y calculamos su árbol de deducciones:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to R, S}{\neg R, P \to S}}{P \to \neg R \supset S}}{\to \neg P, \neg R \supset S} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \to S, R}{\neg R, Q \to S}}{Q \to \neg R \supset S}}{(\neg P \supset Q) \to (\neg R \supset S)}}{\to (\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S)}$$

Obtenemos un árbol de contradicción. Observamos las hojas para formar:

$$(\neg P \vee R \vee S) \wedge (\neg Q \vee S \vee R)$$

que es la forma normal conjuntiva buscada. □

Para calcular la forma normal disyuntiva se procede de forma dual.

Ejemplo 60. Calculamos el árbol de deducción del secuente

$$(\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S) \to$$

que es:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to P, Q}{\neg P \to Q}}{\to \neg P \supset Q} \qquad \dfrac{\dfrac{R \to}{\to \neg R} \qquad S \to}{\neg R \supset S \to}}{(\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S) \to}$$

de donde la FND es

$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R \vee S$$

En el ejemplo anterior nótese que

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to P, Q}{\neg P, \neg Q \to}}{\neg P \wedge \neg Q \to} \qquad R \to \qquad S \to}{(\neg P \wedge \neg Q) \vee R \vee S \to}$$

de donde $I \models (\neg P \wedge \neg Q) \vee R \vee S$ si y sólo si $I \models (\neg P \supset Q) \supset (\neg R \supset S)$

Tarea 13. *Usando árboles de deducción, calcule las formas normales conjuntivas y disyuntivas de las siguientes fórmulas.*

(1) $(A \supset C) \supset ((B \supset D) \supset ((A \vee B) \supset C))$

(2) $(A \supset B) \supset ((B \supset \neg C) \supset \neg A)$

Capítulo 2

Lógica de Primer Orden

Lógica de primer orden (First Order Logic)(FOL) se refiere a lógica de proposiciones junto con cuantificadores.

1. Sintaxis

1.1. Definiciones básicas. En FOL se hacen uso de los siguientes símbolos:

(1) $x, y, z, x_1, x_2, \ldots,$ se llaman **variables.**
(2) $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$ se llaman **constantes.**
(3) $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$ se llaman **funciones.**

Un símbolo función con n argumentos se llama función n-aria. Las constantes se consideran funciones 0-arias.

Además de estos símbolos se usan los llamados *términos*. La definición de término se hace usando *inducción estructural*.

Definición 61. *Los siguientes son* **términos***:*

- *las constantes*
- *las variables*
- *funciones aplicadas a términos*

Ejemplo 62. Los siguientes son ejemplos de términos:

- a constante
- x variable
- $f(a),\ g(x, b),\ f(g(f(x), f(b)))$; donde f es función 1-aria y g es función 2-aria.

Las letras proposicionales de PL se generalizan a **predicados** que se denotan $p, q, r, \ldots, p_1, p_2, \ldots$

Definición 63.

- *Un* **predicado** n**-ario** *toma* n *términos como argumento.*
- *Una* **variable proposicional** *es un predicado 0-ario (sin argumentos) y se denota como* $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots$
- *Una* **átomo** *es* $\top, \bot$ *o un predicado* n*-ario aplicado a* n *términos.*
- *Una* **literal** *es un átomo o su negación.*

Ejemplo 64. Las siguientes son literales:

- P una variable proposicional, predicado 0-ario, átomo.
- $p(f(x), g(x, f(x)))$ es un predicado 2-ario aplicado a dos términos, átomo.
- $\neg p(f(x), g(x, f(x)))$ negación de átomo.

Las fórmulas que se estudian en FOL se definen de manera recursiva:

Definición 65. *Una* **fórmula** *en FOL es una literal, la aplicación de los conectivos lógicos* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ *a fórmulas o la aplicación de un* **cuantificador** *a una fórmula. Donde los cuantificadores son:*

(1) Existencial: $\exists x.\, \mathcal{F}[x]$

(2) Universal: $\forall x.\, \mathcal{F}[x]$

En la expresión

$$\forall x.\, \mathcal{F}[x]$$

x se llama la **variable cuantificada** y $F[x]$ el **campo, influencia, alcance** (scope) del cuantificador. Similarmente para $\exists x.\, \mathcal{F}[x]$. En ambos casos decimos que x en está **acotada** por el cuantificador.

El punto "." en ". $\mathcal{F}[x]$" indica que el campo de la variable cuantificada se extiende tanto como sea posible.

Definición 66. $\forall x. \forall y.\, \mathcal{F}[x, y]$ *se abrevia como* $\forall x, y.\, \mathcal{F}[x, y]$.

Ejemplo 67. En

$$\forall x.\, \underbrace{p(f(x), x) \rightarrow (\exists y.\, \overbrace{p(f(g(x, y), g(x, y)))}^{\text{campo de } y}) \wedge q(x, f(x))}_{\text{influencia de } x}$$

Definición 68. *Una variable* x *es* **libre** *en la fórmula si aparece como no acotada por ningún cuantificador. El conjunto de variables libres de una fórmula* $\mathcal{F}$ *s denota como:*

$$\text{free}(\mathcal{F}).$$

Una variable x se dice **acotada** *en la fórmula $\mathcal{F}[x]$ si aparece x en la influencia de un cuantificador $\forall x$ ó $\exists x$. El conjunto de variables acotadas de una fórmula $\mathcal{F}$ es*

$$\text{bound}(\mathcal{F}).$$

Es posible que $\text{free}(\mathcal{F}) \cap \text{bound}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$ como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 69. Sea

$$\mathcal{F} : \forall x.\, p(f(x), y) \to \forall y.\, p(f(x), y)$$

entonces

- x aparece sólo acotada;
- y aparece libre en el antecedente, y aparece acotada en el consecuente;

$$\text{free}(\mathcal{F}) = \{y\}, \quad \text{bound}(\mathcal{F}) = \{x, y\}$$

1.2. Subfórmulas.

Definición 70.

(1) *Si p es un predicado n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ términos, entonces la única subfórmula de $p(t_1, \ldots, t_n)$ es $p(t_1, \ldots, t_n)$.*

(2) *Si $\mathcal{F}$ es fórmula, las subfórmulas de $\neg\mathcal{F}$ son $\neg\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ y las subfórmulas de $\mathcal{F}$.*

(3) *Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ son fórmulas, las subfórmulas de $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1 \leftrightarrow \mathcal{F}_2$ son las fórmulas mismas y las subfórmulas de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$.*

(4) *Si $\mathcal{F}$ es fórmula, las subfórmulas de $\exists x.\, \mathcal{F}$ y $\forall x.\, \mathcal{F}$ son la fórmula misma y las subfórmulas de $\mathcal{F}$.*

(5) *Una* **subfórmula estricta** *excluye a la fórmula misma.*

Definición 71. *Los* **subtérminos** *de una fórmula en FOL son:*

(1) *el único subtérmino de una constante a o una variable x es a y x respectivamente;*

(2) *los subtérminos de $f(t_1, \ldots, t_n)$ son el término mismo y los subtérminos de $t_1, \ldots, t_n$.*

Ejemplo 72. Sea

$$\mathcal{F} : \forall x.\, p(f(x), y) \to \forall y.\, p(f(x), y).$$

Las subfórmulas de $\mathcal{F}$ son:

- $\mathcal{F}$

- $p(f(x), y) \to \forall y.\, p(f(x), y)$
- $p(f(x), y)$
- $\forall y.\, p(f(x), y)$
- $p(f(x), y)$

Ejemplo 73. Los subtérminos de

$$g(f(x), f(h(f(x))))$$

son

- $g(f(x), f(h(f(x))))$
- $f(x)$
- $f(h(f(x)))$
- $h(f(x))$
- $f(x)$
- x

A veces se pueden traducir afirmaciones en español a fórmulas de FOL.

Ejemplo 74.

- Cada perro tiene su día.

$$\forall x.\, \mathrm{perro}(x) \to \exists y.\, \mathrm{dia}(y) \wedge \mathrm{EsSuDia}(x, y)$$

- Algunos perros tiene más días que otros.

$$\exists x, y.\, \mathrm{perro}(x) \wedge \mathrm{perro}(y) \wedge \#\mathrm{dias}(y) > \#\mathrm{dias}(x)$$

- Todos los gatos tienen más días que los perros.

$$\forall x, y.\, \mathrm{perro}(x) \wedge \mathrm{gato}(y) \to \#\mathrm{dias}(y) > \#\mathrm{dias}(x)$$

- Fido es un perro, Silvestre es un gato. Fido tiene menos días que Silvestre.

$$\mathrm{perro}(\mathrm{Fido}) \wedge \mathrm{gato}(\mathrm{Silvestre}) \wedge \#\mathrm{dias}(\mathrm{Fido}) < \#\mathrm{dias}(\mathrm{Silvestre})$$

- La longitud de uno de los lados de un triángulo es mayor que la suma de las longitudes de los otros dos.

$$\forall x, y, z.\, \mathrm{LadosTriangulo}(x, y, z) \to \mathrm{Long}(x) < \mathrm{Long}(y) + \mathrm{Long}(z)$$

Tarea 14. *Codifique las siguientes afirmaciones con fórmulas de FOL.*

(1) Algunos días son más largos que otros.
(2) En todo el mundo sólo hay un lugar que puedo llamar hogar.
(3) La madre de mi madre es my abuela.
(4) La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

2. Semántica

2.1. Interpretaciones.

Definición 75. *Una* **interpretación** I *en FOL consiste de:*

(1) *Un* **dominio de interpretación (universo de discurso)** D_I *que es un conjunto no vacío.*

(2) **Asignaciones** α_I *que aplica contantes, funciones y predicados a elementos, funciones y predicados sobre* D_I *y también aplica variables a elementos de* D_I*:*

   (a) *a cada variable* x *le asigna un elementos* $x_I \in D_I$*;*

   (b) *a cada función* f *se le asigna una función* n*-aria:*

$$f_I : D_I^n \to D_I$$

   que aplica a n *elementos de* D_I *un elemento de* D_I*;*

   (c) *cada predicado* n*-ario se le asigna un predicado* n*-ario*

$$p_I : D_I^n \to \{\mathbf{false}, \mathbf{true}\}.$$

En particular, a cada constante (función 0-aria) se le asigna un valor en D_I *y a cada variable proposicional (predicado 0-ario) se le asigna un valor de verdad.*

Es decir, una interpretación I *es un par* (D_I, α_I)*.*

Ejemplo 76. Sea

$$\mathcal{F} : p(f(x,y),z) \to p(y, g(z,x))$$

con interpretación $I : (\mathbb{Z}, \alpha_I)$ donde

$$\alpha_I : \{f \mapsto +, g \mapsto -, p \mapsto >, x \mapsto 13, y \mapsto 42, z \mapsto 1, \ldots\}$$

entonces

$$\mathcal{F}_I : 13 + 42 > 1 \to 42 > 1 - 13$$

Definición 77. *Sea* $\mathcal{F}$ *una fórmula y* $I : (D_I, \alpha_I)$ *una interpretación. Escribimos*

$$I \models \mathcal{F}$$

(que se lee: I *valida a* $\mathcal{F}$*), si* $\mathcal{F}$ *se evalua a* **true** *bajo la interpretación. En caso contrario se escribe*

$$I \not\models \mathcal{F}.$$

Definición 78. *Sea* I *una interpretación arbitraria. Se definen*

- $I \models \top$
- $I \not\models \bot$

Es decir todas las interpretaciones validan a $\top$*, mientras que ninguna interpretación valida a* $\bot$*.*

Definición 79.

(1) Si $I : (D_I, \alpha_I)$ es una interpretación, x variable, c constate y f función, entonces sus asignaciones se denotan como:

$$\alpha_I[x], \quad \alpha_I[c], \quad \alpha_I[f].$$

(2) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y f función n-aria, la asignación del término $f(t_1, \ldots, t_n)$ es

$$\alpha_I[f(t_1, \ldots, t_n)] = \alpha_I[f](\alpha_I[t_1], \ldots, \alpha_I[t_n])$$

(3) Si p es un predicado n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ términos, entonces

$$\alpha_I[p(t_1, \ldots, t_n)] = \alpha_I[p](\alpha_I[t_1], \ldots, \alpha_I[t_n])$$

y $I \models p(t_1, \ldots, t_n)$ si y sólo si $\alpha_I[p(t_1, \ldots, t_n)] = \mathbf{true}$.

Lo anterior define interpretaciones para los casos base. En el caso inductivo tenemos:

Definición 80. *Si $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ son fórmulas, I una interpretación:*

- $I \models \neg\mathcal{F}$ *ssi* $I \not\models \mathcal{F}$
- $I \models \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$ *ssi* $I \models \mathcal{F}_1$ *y* $I \models \mathcal{F}_2$
- $I \models \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F} - 2$ *ssi* $I \models \mathcal{F}_2$ *o* $I \models \mathcal{F}_2$
- $I \models \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ *ssi, si* $I \models \mathcal{F}_1$ *entonces* $I \models \mathcal{F}_2$

Ejemplo 81. En la fórmula del ejemplo anterior:

$$\mathcal{F} : p(f(x, y), z) \to p(y, g(z, x))$$

donde

$$\alpha_I : \{p \mapsto >, f \mapsto +, g \mapsto -, x \mapsto 13, y \mapsto 42, z \mapsto 1\}$$

calculamos su valor de verdad como sigue: tenemos que $I \models \mathcal{F}$ si y sólo si es cierto que $I \models p(f(x, y), z)$ entonces $I \models p(y, g(z, x))$ es cierta. Pero $I \models p(f(x, y), z)$ si y sólo si $\alpha_I[p(f(x, y), z)] = \mathbf{true}$; a su vez

$$\begin{aligned}
\alpha_I[p(f(x, y), z)] &= \alpha_I[p](\alpha_I[f(x, y), \alpha_I(z)]), && \text{por definición} \\
&= > (\alpha_I[f](\alpha_I[x], \alpha_I[y]), 1) && \\
&= > (+(13, 42), 1) && \text{notación prefix para } +, > \\
&= > (13 + 42, 1) && \text{notación infix para } + \\
&= 13 + 42 > 1 && \text{notación infix para } > \\
&= \mathbf{true} &&
\end{aligned}$$

por lo que

$$I \models p(f(x, y), z).$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\alpha_I[p(y, g(z, x))] &= \alpha_I[p](\alpha_I[y], \alpha_I[g(z, x)])\\ &= >(42, \alpha_I[g](\alpha_I[z], \alpha_I[x]))\\ &= >(42, -(1, 13))\\ &= 42 > 1 - 13\\ &= \mathbf{true}\end{aligned}$$

luego

$$I \models p(y, g(z, x))$$

por lo que la afirmación $I \models p(f(x, y), z) \to I \models p(y, g(z, x))$ es cierta. Por lo tanto

$$I \models \mathcal{F}.$$

Para calcular el valor de verdad de proposiciones cuantificadas necesitamos del concepto de *x-variación*.

Definición 82. *Sea x una variable. Una* **x-variación** *de una interpretación $I : (D_I, \alpha_I)$ es una interpretación $J : (D_J, \alpha_J)$ tal que*

(1) $D_J = D_I$

(2) $\alpha_J[u] = \alpha[u]$ *para todas las constantes, variables, funciones y predicados u excepto posiblemente en x.*

Con

$$I \lhd \{x \mapsto v\}$$

se denota a la x-variación J de I tal que $\alpha_J[x] = v$ para algún $v \in D_I$.

Ejemplo 83. Sea $I : (D_I, \alpha_I)$ una interpretación donde $\mathcal{D}_I = \mathbb{Z}$ y

$$\alpha_I : \{p \mapsto >, f \mapsto +, g \mapsto -, x \mapsto 13, y \mapsto 42, z \mapsto 1\}$$

Una x-variación de I es $J : (\mathbb{Z}, \alpha_J)$ donde

$$\alpha_J : \{p \mapsto >, f \mapsto +, g \mapsto -, x \mapsto 14, y \mapsto 42, z \mapsto 1\}$$

que se denota $I \lhd \{x \mapsto 14\}$. Otra x-variación de I viene dada por

$$\{p \mapsto >, f \mapsto +, g \mapsto -, x \mapsto -4, y \mapsto 42, z \mapsto 1\}$$

que se denota como $I \lhd \{x \mapsto -4\}$. Una z-variación es:

$$\{p \mapsto >, f \mapsto +, g \mapsto -, x \mapsto 13, y \mapsto 42, z \mapsto 0\}$$

que es $I \lhd \{z \mapsto 0\}$.

Definición 84.

(1) $I \models \forall x.\mathcal{F}$ *ssi para todo* $v \in D_I$, $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}$

(2) $I \models \exists x.\mathcal{F}$ *ssi existe* $v \in D_I$, $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}$

Esto se $I \models \forall x.\mathcal{F}$ ssi todas las x-variaciones de I validan a $\mathcal{F}$, mientras que $I \models \exists.\mathcal{F}$ ssi existe una x-variación de I que valida a $\mathcal{F}$.

Ejemplo 85. Sea

$$\mathcal{F} : \exists x.\, f(x) = g(x)$$

con interpretación $I : (\{\circ, \bullet\}, \alpha_I)$ donde

$$\alpha_I : \{f(\circ) \mapsto \circ, f(\bullet) \mapsto \bullet, g(\circ) \mapsto \bullet, g(\bullet) \mapsto \circ\}$$

Sólo hay dos x-variaciones de I:

(1) $J_1 : I \lhd \{x \mapsto \circ\}$; $I \lhd \{x \mapsto \circ\} \not\models f(x) = g(x)$
(2) $J_2 : I \lhd \{x \mapsto \bullet\}$; $I \lhd \{x \mapsto \bullet\} \not\models f(x) = g(x)$

esto significa que

$$I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models f(x) = g(x), \text{ para todo } v \in D_I : \{\circ, \bullet\}$$

luego, por definición,

$$I \not\models \exists x.\, f(x) = g(x)$$

Finaliza 2do parcial

Tarea 15. *Escribir como fórmulas de FOL las siguientes. Identificar términos variables, constantes, predicados, funciones, variables libre y acotadas.*

(1) Dado cualquier entero mayor que 2, existen dos numeros primos cuya suma es el entero dado
(2) Entre dos numeros reales diferentes existe un numero real.
(3) Si n es un entero poitivo entonces la suma de los primeros n enteros es igual a la mitad del producto de n y su sucesor.

3. Satisfactibilidad y Validez

Definición 86. *Sea $\mathcal{F}$ una fórmula tal que* $\mathrm{free}(\mathcal{F}) = \varnothing$.

(1) $\mathcal{F}$ se dice **satisfactible** *ssi existe una interpretación I tal que $I \models \mathcal{F}$.*
(2) $\mathcal{F}$ se dice **válida** *ssi para toda interpretación I se cumple que $I \models \mathcal{F}$.*

Como antes, $\mathcal{F}$ es válida ssi $\neg\mathcal{F}$ es insatisfactible.

Definición 87. *Sea $\mathcal{F}$ una fórmula tal que* $\mathrm{free}(\mathcal{F}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

(1) La clausura universal de $\mathcal{F}$ se denota con $\forall * .\mathcal{F}$ y esta es

$$\forall x_1.\forall x_2.\ldots.\forall x_n.\mathcal{F}$$

(2) La clausura existencial de $\mathcal{F}$ se denota con $\exists * .\mathcal{F}$ y esta es

$$\exists x_1.\exists x_2.\ldots.\exists x_n.\mathcal{F}$$

Ejemplo 88. Sea

$$\mathcal{F} : p(f(x,y),z) \to p(y,g(z,x))$$

Tenemos que $\text{free}(\mathcal{F}) = \{x,y,z\}$. Entonces su clausura universal

$$\forall * .\, p(f(x,y),z) \to p(y,g(z,x))$$

es

$$\forall x,y,z.\, p(f(x,y),z) \to p(y,g(z,x))$$

es decir,

$$\forall x.\forall y.\forall z.\, p(f(x,y),z) \to p(y,g(z,x))$$

Mientras que la clausura existencial

$$\exists * .\, p(f(x,y),z) \to p(y,g(z,x))$$

es

$$\exists x,y,z.\, p(f(x,y),z) \to p(y,g(z,x))$$

que significa

$$\exists x.\exists y.\exists z.\, p(f(x,y),z) \to p(y,g(z,x))$$

Ejemplo 89. Sea

$$\mathcal{F} : \forall x.\, p(f(x),y) \to \forall y.\, p(f(x),y)$$

Como $\text{free}(\mathcal{F}) = \{y\}$ entonces

$$\forall * .\, \mathcal{F} :\ \forall y,x.\, p(f(x),y) \to \forall y.\, p(f(x),y)$$

y

$$\exists * .\, \mathcal{F} :\ \exists y.\,\forall x.\, p(f(x),y) \to \forall y.\, p(f(x),y)$$

Definición 90. *Sea $\mathcal{F}$ una fórmula tal que* $\text{free}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$.

(1) $\mathcal{F}$ se dice **satisfactible** *si $\exists * .\, \mathcal{F}$ es satisfactible.*

(2) $\mathcal{F}$ se dice **válida** *si $\forall * .\, \mathcal{F}$ es válida.*

Definición 91. *Sea I una interpretación. Una* **variación** *J de I es una x_{i_k}-variación de una $x_{i_{k-1}}$-variación, ..., de una x_{i_1}-variación:*

$$J : I \lhd \{x_{i_1} \mapsto v_1\} \cdots \lhd \{x_{i_{k-1}} \mapsto v_{k-1}\}$$

Los razonamientos semánticos en FOL son la extensión de los de PL. Las reglas de deducción para los cuantificadores son:

- $$\frac{I \models \forall x.\, \mathcal{F}}{I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}} \text{ para cualquier } v \in D_I \text{ ``viejo''}$$

donde variable vieja significa: introducida antes en la prueba.

- $$\frac{I \not\models \exists x.\, \mathcal{F}}{I \lhd \{x \models v\} \not\models \mathcal{F}} \text{ para cualquier } v \in D_I \text{ “viejo”}$$

- $$\frac{I \models \exists x.\, \mathcal{F}}{I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}} \text{ para algún } v \in D_I \text{ “nueva”}$$

  donde variable “nueva” significa una variable no usada en la prueba.

- $$\frac{I \not\models \forall x.\, \mathcal{F}}{I \lhd \{x \models v\} \not\models \mathcal{F}} \text{ para algún } v \in D_I \text{ “nueva”}$$

- Regla de contradicción: sean J, K dos variaciones de una interpretación I.

  $$\frac{\begin{array}{c} J \models p(s_1, \ldots, s_n) \\ K \not\models p(t_1, \ldots, t_n) \end{array}}{I \models \bot} \text{ si } \alpha_J[s_1] = \alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_J[s_n] = \alpha_k[t_n]$$

Ejemplo 92. Probar que

$$\mathcal{F} : (\forall x.\, p(x)) \to (\forall y.\, p(y))$$

es válida.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que existe I interpretación tal que $I \not\models \mathcal{F}$:

(1) $I \not\models \mathcal{F}$, hip.

(2) $I \models \forall x.\, p(x)$, (1) semántica de $\to$

(3) $I \not\models \forall y.\, p(y)$, (1) semántica de $\to$

(4) $J : I \lhd \{y \mapsto v\} \not\models p(y)$, para algún $v \in D_I$, (3) y semántica de $\forall$

(5) $K : I \lhd \{x \mapsto v\} \models p(x)$, (2) y semántica de $\forall$

(6) $I \models \bot$, (4), (5) regla de contradicción, pues $\alpha_J[y] = v = \alpha_K[x]$

$\square$

Ejemplo 93. Sea

$$\mathcal{F} : (\forall x.\, p(x)) \leftrightarrow (\neg \exists x.\, \neg p(x)).$$

Averiguar si es válida.

Sol. Supogamos que no es válida, entonces existe una interpretación I tal que

(1) $I \not\models \mathcal{F}$

Entonces la prueba se ramifica: tenemos dos casos:

(2a) $I \models \forall x.\, p(x)$, (1) semántica de $\leftrightarrow$

(3a) $I \not\models \neg\exists x.\, \neg p(x)$, (1) semántica de $\leftrightarrow$

o bien

(2b) $I \not\models \forall x.\, \forall x.\, p(x)$, (1) semántica de $\leftrightarrow$

(3b) $I \models \neg\exists x.\, \neg p(x)$, (1) semántica de $\leftrightarrow$

Examinamos el primer caso:

(4a) $I \models \exists x.\, \neg p(x)$, (3a) semántica de $\neg$

(5a) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \neg p(x)$, para algún $v \in D_I$, (4a) y $\exists$

(6a) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models p(x)$, (2a) y $\forall$

(7a) $I \models \bot$, (5a), (6a) y regla de contradicción.

mientras que en el segundo caso:

(4b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models p(x)$ para algún $v \in D_I$, (2b) y $\forall$

(5b) $I \not\models \exists x.\, \neg p(x)$, (3b) y $\neg$

(6b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \neg p(x)$, (5b) y $\exists$

(7b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models p(x)$, (6b) y $\neg$

(8b) $I \models \bot$, (4b) , (7b) regla de contradicción.

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es válida. $\square$

A veces es útil referenciar valores conocidos, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 94. Sea

$$\mathcal{F} : p(a) \to \exists x.\, p(x)$$

es válida, pues si

(1) $I \not\models \mathcal{F}$, hip.

(2) $I \models p(a)$, (1) y $\to$

(3) $I \not\models \exists x.\, p(x)$, (1) y $\to$

(4) $K : I \lhd \{x \mapsto \alpha_I[a]\} \not\models p(x)$, (3) y $\exists$

(5) $I \models \bot$, pues (2), (4) regla de contradicción, pues $\alpha_I[a] = \alpha_K[x]$

$\mathcal{F}$ es inválida ssi $\mathcal{F}$ no es válida ssi existe I tal que $I \not\models \mathcal{F}$ ssi $I \models \neg\mathcal{F}$. En resumen

$$\mathcal{F} \text{ es inválida ssi existe } I \text{ tal que } I \models \neg\mathcal{F}.$$

Ejemplo 95. Mostrar que

$$\mathcal{F} : (\forall x.\, p(x, x)) \to (\exists x.\, \forall y.\, p(x, y))$$

es inválida.

Sol. Tenemos que encontrar una interpretación I tal que $I \models \neg\mathcal{F}$, i.e., $I \not\models \mathcal{F}$, esto es

$$I \models \forall x.\, p(x,x) \text{ y } I \not\models (\exists x.\, \forall y.\, p(x,y)).$$

La asignación de la interpretación α_I tiene que asignar a p un predicado binario:

$$\underbrace{\alpha[p]}_{p_I} : D_I \times D_I \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$$

Definimos el dominio de la interpretación como $D_I = \{0,1\}$ y el predicado p_I como

$$p_I : (a,b) \in A$$

donde $A = \{(0,0),(1,1)\}$. Esto es:

$$p_I(a,b) = \mathbf{true} \text{ ssi } (a,b) \in A.$$

Luego tenemos que checar que

(1) $I \models \forall x.\, p(x,x)$

(2) $I \not\models \exists x.\, \forall y.\, p(x,y)$

(1) Todas las x-variaciones de I son
  (a) $J_1 : I \lhd \{x \mapsto 0\}$
  (b) $J_2 : I \lhd \{x \mapsto 1\}$

pero $J_1 \models p(x,x)$ ssi $\alpha_{J_1}[p(x,x)] = \mathbf{true}$. Calculemos

$$\begin{aligned} \alpha_{J_1}[p(x,x)] &= \alpha_{J_1}[p](\alpha_{J_1}[x], \alpha_{J_1}[x]) \\ &= p_I(0,0) \\ &= \mathbf{true}, && \text{pues } (0,0) \in A, \end{aligned}$$

por lo que $J_1 \models p(x,x)$. Similarmente $J_2 \models p(x,x)$. Por lo tanto

$$I \models \forall x.\, p(x,x).$$

(2) Tenemos que checar que todas las x-variaciones de I no validan a $\forall y.\, p(x,y)$:
  (a) $J_1 \not\models \forall y.\, p(x,y)$
  (b) $J_2 \not\models \forall y.\, p(x,y)$
  (a) Tenemos que checar, a su vez, que existe una y-variación de J_1 tal que

$$J_1 \lhd \{y \mapsto y\} \not\models p(x,y).$$

Consideremos $K_1 : J_1 \lhd \{y \mapsto 1\}$. Luego

$$\begin{aligned} \alpha_{K_1}[p(x,y)] &= \alpha_{K_1}[p](\alpha_{K_1}[x], \alpha_{K_1}[y]) \\ &= p_I(0,1) \\ &= \mathbf{false}, && \text{pues } (0,1) \notin A, \end{aligned}$$

lo que implica, por definición que $K_1 \not\models p(x,y)$, luego

$$J_1 \not\models \forall y.\, p(x,y)$$

.

(b) Similar al anterior.

□

Tarea 16. *Identifique si las siguientes son válidas o no. Si lo son, pruébelo con una demostración semántica. Si no lo es identifique una interpretación que falsifique.*

(1) $(\forall x, y.\, p(x,y) \to p(y,x)) \to \forall z,\, p(z,z)$

(2) $\forall x, y.\, p(x,y) \to p(y,x) \to \forall z.\, p(z,z)$

(3) $(\exists x.\, p(x)) \to \forall y.\, p(y)$

(4) $(\forall x.\, p(x))) \to \exists y.\, p(y)$

(5) $\exists y.\, (p(x,y) \to (p(y,x) \to \forall z. p(z,z)))$

4. Sustitución

4.1. Renombramiento de una variable cuantificada. Si una variable x aparece acotada en la fórmula $\mathcal{F}$, por ejemplo $\mathcal{F}[\forall x.\, \mathcal{G}[x]]$ entonces el renombramiento de x a una variable x' fresca produce

$$\mathcal{F}[\forall x'.\, \mathcal{G}[x']].$$

donde "variable fresca" es cualquier variable que no aparezca en $\mathcal{F}$. Similarmente para cuantificador existencial.

Las variables que aparecen libres nunca se renombran.

Ejemplo 96. Sea

$$\mathcal{F} : p(x) \land \forall x.\, q(x,y)$$

podemos renombrar x como x' para obtener

$$\mathcal{F} : p(x) \land \forall x'.\, q(x',y)$$

4.2. Sustituciones.

Definición 97. *Una* **sustitución** *es una función de fórmulas en fórmulas:*

$$\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}.$$

El **domino** *de σ es*

$$\mathrm{dom}(\sigma) = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$$

y el **rango** *de σ es*

$$\mathrm{range}(\sigma) = \{\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n\}.$$

Al calcular la aplicación de σ a $\mathcal{F}$ se obtiene una nueva fórmula $\mathcal{F}\sigma$ de la siguiente forma:

- *reemplazar cada ocurrencia de* $\mathcal{F}_i$ *por* $\mathcal{G}_i$*;*
- *cuando las fórmulas* $\mathcal{F}_j$ *y* $\mathcal{F}_k$ *en* $\mathrm{dom}(\sigma)$ *y* $\mathcal{F}_k$ *es subfórmula estricta de* $\mathcal{F}_j$*, se reemplazan las ocurrencias de* $\mathcal{F}_j$ *por* $\mathcal{G}_j$*.*

Ejemplo 98. Sea

$$\mathcal{F} : (\forall x.\, p(x, y)) \to q(f(y), x)$$

y

$$\sigma : \{x \mapsto g(x), y \mapsto f(x), q(f(y), x) \mapsto \exists x.\, h(x, y)\}.$$

Resulta

$$\mathcal{F}\sigma : (\forall x.\, p(g(x), f(x))) \to \exists x.\, h(x, y).$$

La sustitución de una fórmula $\forall x.\, \mathcal{F}$ requiere que $\forall x.\, \mathcal{F}$ sea reemplazado.

Ejemplo 99. Sean

$$\mathcal{F} : \exists y.\, p(x, y) \wedge p(y, x)$$

y

$$\sigma : \{\exists y.\, p(x, y) \mapsto p(x, a)\}.$$

Entonces

$$\mathcal{F}\sigma : \exists y.\, p(x, y) \wedge p(y, x)$$

que es la misma $\mathcal{F}$, pues el cuerpo de $\exists y$ en $\mathcal{F}$ es $p(x, y) \wedge p(y, x)$ y no sólo $p(x, y)$.

4.3. Sustitución segura.

Definición 100.

(1) *Sea* σ *una sustitución:*

$$\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}$$

El conjunto de **variables libres de** σ *es*

$$V_\sigma = \bigcup_i (\mathrm{free}(\mathcal{F}_i) \cup \mathrm{free}(\mathcal{G}_i))$$

(2) *La* **sustitución segura** *de* $\mathcal{F}\sigma$ *se define como*
   (a) *Renombrar cada variable cuantificada* x *en* $\mathcal{F}$ *tal que* $x \in V_\sigma$ *a una variable fresca para producir una fórmula* $\mathcal{F}'$*.*
   (b) *Calcular* $\mathcal{F}'\sigma$*.*

Ejemplo 101. Sea

$$\mathcal{F} : (\forall x.\, p(x, y)) \to q(f(y), x)$$

con sustitución

$$\sigma : \{x \mapsto g(x), y \mapsto f(x), q(f(y), x) \mapsto \exists x.\, h(x, y)\}$$

. Haremos sustitución segura para $\mathcal{F}\sigma$. Primero calculamos las variables libres de σ:

$$\begin{aligned} V_\sigma = \text{free}(x) \cup \text{free}(g(x)) \cup \text{free}(y) \cup (\text{free}(f(x))) \\ \cup\, \text{free}(q(f(x), x)) \cup \text{free}(\exists x.\, h(x, y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{x\} \cup \{x\} \cup \{y\} \cup \{x\} \cup \{y, x\} \cup \{y\} \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Enseguida renombramos cada variable libre de σ cuantificada en $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}' : (\forall x'.\, p(x', y)) \to q(f(y), x)$$

luego sustituimos:

$$\mathcal{F}'\sigma : (\forall x'.\, p(x', f(x))) \to \exists x.\, h(x, y).$$

El segundo paso de la sustitución segura se vuelve trivial si cada variable cuantificada tiene un nombre único.

Ejemplo 102. Sean

$$\mathcal{F} : (\forall z.\, p(z, y)) \to q(f(y), z)$$

$$\sigma : \{x \mapsto g(x), y \mapsto f(y), q(f(y), z) \mapsto \exists w.\, h(w, y)\}.$$

Calularemos sustitución segura:

$$\begin{aligned} V_\sigma = \text{free}(x) \cup \text{free}(g(x)) \cup \text{free}(y) \cup \text{free}(f(y)) \\ \cup\, \text{free}(q(f(y), z)) \cup \text{free}(\exists w.\, h(w, y)) \end{aligned}$$

$$= \{x, y, z\},$$

renombramos:

$$\mathcal{F}' : (\forall z'.\, p(z', y)) \to q(f(y), z)$$

sustituimos:

$$\mathcal{F}\sigma : (\forall z'.\, p(z', f(y))) \to \exists w.\, h(w, y)$$

Nótese que la variable cuantificada z en $\mathcal{F}$ tiene nombre diferente a la variable cuantificada w de σ.

Propiedad 10 (Sustitución de fórmulas equivalentes)**.** *Sea*

$$\sigma : \{\mathcal{F}_1 \mapsto \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \mapsto \mathcal{G}_n\}$$

una sustitución tal que para para cada i, $\mathcal{F}_i \Leftrightarrow \mathcal{G}_i$. Entonces

$$\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}\sigma$$

cuando $\mathcal{F}\sigma$ se calcula con sustitución segura.

4.4. Esquemas de sustituciones. Sabemos que

$$\forall x.\, p(x) \Leftrightarrow \neg\exists x.\, \neg p(x)$$

pero de aquí no se infiere que

$$\mathcal{H} : \forall x.\, \mathcal{F} \leftrightarrow \neg\exists x.\, \neg\mathcal{F}$$

sea válida, pues esta fórmula es más general. De hecho $\mathcal{H}$ es un ejemplo de un **esquema de fórmulas** con **soporte (estante)** (placeholder) $\mathcal{F}$.

Un esquema de fórmulas $\mathcal{H}$ contiene al menos un soporte y posiblemente *condiciones laterales* que especifican que ciertas variables no pueden aparecer libremente en el estante.

Definición 103. *Consideremos una sustitución σ que mapea estantes a fórmulas. Un* **esquema de sustitución** *es una aplicación de σ a un esquema de fórmulas que es legal sólo si σ obedece las condiciones laterales del esquema de fórmulas.*

Propiedad 11 (Esquema de fórmulas)**.** *Si $\mathcal{H}$ es un esquema de fórmulas válido y σ es un esquema de sustitución obedeciendo las condiciones laterales de $\mathcal{H}$ entonces $\mathcal{H}\sigma$ es también válido.*

Ejemplo 104. La fórmula válida $P \rightarrow Q \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ de PL da lugar al esquema de fórmulas válido $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \leftrightarrow (\neg\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$.

Ejemplo 105. Mostraremos que

$$\mathcal{H} : (\forall x.\, \mathcal{F}) \leftrightarrow (\neg\exists x.\, \neg\mathcal{F})$$

es un esquema de fórmulas válido.

Demostración. Supongamos:

(1) $I \not\models \mathcal{H}$, hip.

(2a) $I \models \forall x.\, \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$
(3a) $I \not\models \neg\exists x.\, \neg\mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$
(4a) $I \models \exists x.\, \neg\mathcal{F}$, (3a), $\neg$
(5a) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \neg\mathcal{F}$ para alguna $v \in D_I$, (4a), $\exists$
(6a) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}$, (2a), $\forall$
(7a) $I \models \perp$, (5a) (6a)

(2b) $I \not\models \forall x.\, \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$
(3b) $I \models \neg\exists x.\, \neg\mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$
(4b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \mathcal{F}$, para algún $v \in D_I$, (2b), $\forall$
(5b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \neg\mathcal{F}$, (4b), $\neg$
(6b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \neg\mathcal{F}$, (3b), $\forall$
(7b) $I \models \perp$, (5b) (6b)

$\square$

Ejemplo 106. Ahora supongamos que queremos probar la validez de

$$\mathcal{G} : (\forall x.\, \exists y.\, q(x,y)) \leftrightarrow (\neg\exists x.\, \neg\exists y.\, q(x,y))$$

Sabemos que la fórmula $\mathcal{H}$ del ejemplo inmediato anterior es válida y que entonces $\mathcal{H}$ actúa como un esquema de fórmulas con estante $\mathcal{F}$; luego podemos sustuir en $\mathcal{F}$ con el esquema de sustitución

$$\sigma : \{\mathcal{F} \mapsto \exists y.\, q(x, y)\}$$

para obtener que $\mathcal{H}\sigma$ es $\mathcal{G}$. Luego $\mathcal{G}$ es válida.

Ejemplo 107. Consideremos el esquema de fórmulas con condición lateral:

$$\mathcal{H} : (\forall x.\, \mathcal{F}) \leftrightarrow \mathcal{F} \text{ si } x \notin \text{free}(\mathcal{F}).$$

$\mathcal{H}$ es válida:

Demostración.

(1) $I \not\models \mathcal{H}$, hip.

(2a) $I \models \forall x. \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$	(2b) $I \not\models \forall x.\, \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$
(3a) $I \not\models \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$	(3b) $I \models \mathcal{F}$, (1), $\leftrightarrow$
(4a) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}$ para toda $v \in D_I$	(4b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \neg\mathcal{F}$ para algún $v \in D_I$, (2b), $\forall$
(5a) $I \models \mathcal{F}$ pues $x \notin \text{free}(\mathcal{F})$, (4a)	(5b) $I \models \neg\mathcal{F}$ pues $x \notin \text{free}(\mathcal{F})$
(6a) $I \models \bot$, (3a) (5a)	(6b) $I \models \bot$

□

Luego, por ejemplo, la fórmula

$$\mathcal{G} : (\forall x.\, \exists y.\, p(z, y)) \rightarrow \exists y.\, p(z, y)$$

es válida pues se obtiene de la sustitución

$$\sigma : \mathcal{F} \mapsto \exists y.\, p(z, y)$$

que es legal pues satisface la condición lateral de $\mathcal{H}$:

$$x \notin \text{free}(\exists y.\, p(z, y)).$$

Pero

$$\mathcal{G}' : (\forall x.\, p(x)) \rightarrow p(x)$$

no se puede asegurar válido, pues se obtiene de $\mathcal{H}$ de la sustitución

$$\sigma : \mathcal{F} \mapsto p(x)$$

que no cumple con la condición lateral:

$$x \in \text{free}(p(x)).$$

Ejemplo 108. Para mostrar la validez del esquema de fórmulas

$$\mathcal{H} : (\forall x.\, \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2) \leftrightarrow (\forall x.\, \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x.\, \mathcal{F}_2)$$

hacemos

(1) $I \not\models \mathcal{H}$

(2a) $I \models \forall x. \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (1), $\leftrightarrow$

(3a) $I \not\models (\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x. \mathcal{F}_2)$, (1), $\leftrightarrow$

(4a) $I \models \neg((\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x. \mathcal{F}_2))$, (3a), $\neg$

(5a) $I \models \neg(\forall x. \mathcal{F}_1) \vee \neg(\forall x. \mathcal{F}_2)$, (4a) DeMorgan

(6a) $I \models (\exists x. \neg \mathcal{F}_1) \vee (\exists x. \neg \mathcal{F}2)$, (5a) sustitución en esquemas válidos

(7aa) $I \models \exists x. \neg \mathcal{F}_1$, (6a), $\vee$
(8aa) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \neg \mathcal{F}_1$ para algún $v \in D_I$, (7aa), $\exists$
(9aa) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (2a), $\forall$
(10aa) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_1$, (9aa), $\wedge$
(11aa) $I \models \bot$, (8aa) (10aa)

(7ab) $I \models \exists x. \neg \mathcal{F}_2$, (6a), $\vee$
(8ab) $I \lhd \{\mapsto v\} \models \neg \mathcal{F}_2$ para algún $v \in D_I$, (7ab), $\exists$
(9ab) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (2a), $\forall$
(10ab) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_2$, (9ab), $\wedge$
(11ab) $I \models \bot$, (8ab) (10ab)

(2b) $I \not\models \forall x. \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (1), $\leftrightarrow$

(3b) $I \models (\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x. \mathcal{F}_2)$, (1), $\leftrightarrow$

(4b) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$ para algún $v \in D_I$, (2b), $\forall$

(5ba) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \mathcal{F}_1$, (4b), $\wedge$
(6ba) $I \models \forall x. \mathcal{F}_1$, (3b), $\wedge$
(7ba) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_1$, (6ba), $\forall$
(8ba) $I \models \bot$, (5ba) (7ba)

(5bb) $I \lhd \{x \mapsto v\} \not\models \mathcal{F}_2$, (4b), $\wedge$
(6bb) $I \models \forall x. \mathcal{F}_2$, (3b), $\wedge$
(7bb) $I \lhd \{x \mapsto v\} \models \mathcal{F}_2$, (6bb), $\forall$
(8bb) $I \models \bot$, (5bb) (7bb)

Ejemplo 109. Mostrar que

$$\mathcal{H} : (\forall x. \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2) \leftrightarrow (\forall x\, \mathcal{F}_1) \wedge \mathcal{F}_2$$

es un esquema de fórmulas válido si se cumple que $x \notin \text{free}(\mathcal{F}_2)$.

Demostración.

(1) $I \not\models \mathcal{H}$, hip.

(2a) $I \models \forall x. \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (1), $\leftrightarrow$
(3a) $I \not\models (\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge \mathcal{F}_2$,(1), $\leftrightarrow$
(4a) $I \models (\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x. \mathcal{F}_2)$, (2a) y ejemplo anterior
(5a) $I \models (\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge \mathcal{F}_2$, (4a) y esquema válido del ejemplo inmediato anterior
(6a) $I \models \perp$, (3a) (5a)

(2b) $I \not\models \forall x. \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$, (1), $\leftrightarrow$
(3b) $I \models (\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge \mathcal{F}_2$, (1), $\leftrightarrow$
(4b) $I \models (\forall x. \mathcal{F}_1) \wedge (\forall x.\mathcal{F}_2)$, (3b) y esquema válido del ejemplo inmediato anterior
(5b) $I \models \forall x. (\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2)$, por sustitución en esquema válido anterior
(6b) $I \models \perp$, (2b) (5b)

$\square$

Tarea 17. *Use el método de argumentos semánticos para probar los siguientes esquemas de fórmulas:*

(1) $\neg(\forall x. \mathcal{F}) \Leftrightarrow \exists. \neg \mathcal{F}$
(2) $\neg(\exists x. \mathcal{F}) \Leftrightarrow \forall x. \neg \mathcal{F}$
(3) $\forall x, y. \mathcal{F} \Leftrightarrow \forall y, x. \mathcal{F}$
(4) $\exists y. \forall x. \mathcal{F} \Rightarrow \forall x. \exists y. \mathcal{F}$
(5) $\exists x. \mathcal{F} \vee \mathcal{G} \Leftrightarrow (\exists x. \mathcal{F}) \vee (\exists y. \mathcal{G})$
(6) $\exists x. \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \Leftrightarrow (\forall x. \mathcal{F}) \rightarrow (\exists y.\mathcal{G})$
(7) $\exists x. \mathcal{F} \vee \mathcal{G} \Leftrightarrow (\exists x. \mathcal{F}) \vee \mathcal{G}$, *si* $x \notin \mathrm{free}(G)$
(8) $\forall x. \mathcal{F} \vee \mathcal{G} \Leftrightarrow (\forall x. \mathcal{F}) \vee \mathcal{G}$, *si* $x \notin \mathrm{free}(G)$
(9) $\exists x. \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \Leftrightarrow (\exists x. \mathcal{F}) \wedge \mathcal{G}$, *si* $x \notin \mathrm{free}(G)$
(10) $\forall x. \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \Leftrightarrow (\exists x. \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G}$, *si* $x \notin \mathrm{free}(G)$

5. Propiedades generales de la semántica

Definición 110. *Sea $\mathcal{B}$ una fórmula, I una interpretación.*

(1) Se dice que $\mathcal{B}$ es **verdadera para la interpretación** *I y se escribe $\models_I \mathcal{B}$ si y sólo si para toda J variación de I se cumple*

$$J \models \mathcal{B}$$

(2) $\mathcal{B}$ se dice **falsa para la interpretación** *I si y sólo si para toda J variación de I se cumple*

$$J \not\models \mathcal{B}$$

(3) La interpretación I se dice **modelo** *para un conjunto de fórmulas Γ si y sólo si, para toda $\mathcal{B} \in \Gamma$, $\models_I \mathcal{B}$.*

Propiedad 12.

(I) $\mathcal{B}$ es falsa para I si y sólo si $\neg\mathcal{B}$ es verdadera para I.

(II) $\mathcal{B}$ es verdadera para I si y sólo si $\neg\mathcal{B}$ es falsa para I.

Demostración.

(I) $\mathcal{B}$ es falsa para I ssi para toda variación J de I, $J \not\models \mathcal{B}$ ssi $J \models \neg\mathcal{B}$ ssi $\models_I \neg\mathcal{B}$.

(II) Tarea.

□

Propiedad 13.

(III) Si $\models_I \mathcal{B}$ y $\models_I \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ entonces $\models_I \mathcal{C}$.

(IV) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es falsa para I ssi $\models_I \mathcal{B}$ y $\models_I \neg\mathcal{C}$.

Demostración.

(III) Por contradicción:
  (1) $\not\models_I \mathcal{C}$, hip.
  (2) $\models_I \mathcal{B}$, hip.
  (3) $\models_I \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, hip.
  (4) $J \not\models \mathcal{C}$ para alguna variación J de I, (1)
  (5) $J \models \mathcal{B}$, (2)
  (6) $J \not\models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, (5) (4) y $\to$
  (7) $J \models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, (3)
  (8) $J \models \perp$, (6), (7)

(IV) Supongamos que $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es falsa para I entonces para toda variación J de I, $J \not\models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, esto es $J \models \mathcal{B}$ y $J \not\models \mathcal{C}$. Entonces para toda variación J de I ocurre que $J \models \mathcal{B}$ y para toda variación J de I ocurre $J \not\models \mathcal{C}$, luego $I \models_I \mathcal{B}$ y $\models_I \neg\mathcal{C}$.

Recíprocamente, supongamos que $\models_I \mathcal{B}$ y $\models_I \neg\mathcal{C}$. Si J es cualquier variación de I entonces $J \models \mathcal{B}$ y $J \models \neg\mathcal{C}$, entonces $J \not\models B \to \mathcal{C}$. Tenemos que para cualquier variación J de I ocurre que $J \not\models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, lo que significa que $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es falsa para I.

□

Propiedad 14 ((VI))**.** *$\models_I \mathcal{B}$ si y sólo si $\models_I \forall x_i.\mathcal{B}$, para cualquier variable x_i. En consecuencia*

$$\models_I \mathcal{B} \text{ ssi } \models_I \forall * .\mathcal{B}$$

Demostración. Supongamos que $\models_I \mathcal{B}$ entonces, para cualquier variación J de I se cumple $J \models \mathcal{B}$. Tomemos una variación J y $v \in D_I$ cualquiera, además de una variable x_i. Por hipótesis:

$$J \models \mathcal{B}.$$

Entonces $J \lhd \{x_i \mapsto v\}$ es una nueva variación de I por lo que

$$J \lhd \{x_i \mapsto v\} \models \mathcal{B}, \qquad \text{para todo } v \in D_I$$

luego por definición

$$J \models \forall x_i.\, \mathcal{B}, \qquad \text{para toda } J \text{ variación de } I$$

y de nuevo, por definición

$$\models_I \forall x_i.\, \mathcal{B}.$$

Recíprocamente, supongamos $\models_I \forall x_i.\, \mathcal{B}$ para x_i alguna variable. Sea J cualquier variación de I. Por hipótesis

$$J \models \forall x_i.\, \mathcal{B}. \tag{9}$$

Por definición de interpretación, J, que es una interpretación, debe de asignarle algún valor a la variable x_i: $\alpha_J[x_i] \in D_I$, luego J es la x_i-variación $J \lhd \{x_i \mapsto \alpha_J[x_i]\}$. Luego de (9),

$$J \lhd \{x_i \mapsto \alpha_J[x_i]\} \models \mathcal{B}$$

que es

$$J \models \mathcal{B}$$

lo cual ocurre para cada variación J; por lo tanto, por definición,

$$\models_I \mathcal{B}.$$

Ahora, si $\mathrm{free}(\mathcal{B}) = \varnothing$ entonces $\forall *.\, \mathcal{B}$ es $\mathcal{B}$, luego trivialmente se cumple

$$\models_I \mathcal{B} \text{ ssi } \models_I *.\, \mathcal{B}$$

y si $\mathrm{free}(\mathcal{B}) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ se cumple

$$\begin{aligned}\models_I \mathcal{B} &\text{ ssi } \forall x_{i_k}.\, \mathcal{B}\\ &\text{ ssi } \forall x_{i_{k-1}}.\, \forall x_{i_k}.\, \mathcal{B}\\ &\ldots\\ &\underbrace{\text{ ssi } \forall x_{i_1}.\, \ldots \forall x_{i_{k-1}}.\, \forall x_{i_k}.\, \mathcal{B}}_{\forall *.\, \mathcal{B}}\end{aligned}$$

□

Definición 111. *Un* **ejemplar** *de una fórmula proposional es la sustitución en cada letra proposicional por una fórmula.*

Ejemplo 112. Sea $\mathcal{B} : A_1 \to \neg A_2 \vee A_1$ fórmula proposicional. Un ejemplar de $\mathcal{B}$ es:

$$q(x_1) \to (\neg \forall x_2.\, p(x_1, x_2)) \vee q(x_1)$$

Propiedad 15 (VII)**.** *Si $\mathcal{B}$ es fórmula proposicional válida y $\mathcal{B}'$ ejemplar de $\mathcal{B}$ entonces $\models_I \mathcal{B}'$ para toda interpretación I.*

Demostración. Sea I una interpretación. Primero se demostrará que cada ejemplar de los axiomas es verdadero.

Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ fórmulas en FOL:

(A1) $\models_I \mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$: Sea J una variación de I. Sabemos que la siguiente afirmación es cierta:

$$J \models \mathcal{B} \text{ ó } J \not\models \mathcal{B}$$

luego es cierta

$$J \not\models \mathcal{B} \text{ ó } J \not\models \mathcal{C} \text{ ó } J \models \mathcal{B}$$

por lo que se cumple

$$J \not\models \mathcal{B} \text{ ó } J \models \mathcal{C} \to \mathcal{B}$$

luego

$$J \models \mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$$

y como J es arbitraria se concluye que

$$\models_I \mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$$

(A2) $\models_I (\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D}))$: por contradicción:

(1) $\not\models_I (\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D}))$, hip.
(2) $J \not\models_I (\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D}))$ para alguna J variación de I, (1)
(3) $J \models \mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})$, (2), $\to$
(4) $J \not\models (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D})$, (2), $\to$
(5) $J \models \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, (4), $\to$
(6) $J \not\models \mathcal{B} \to \mathcal{D}$, (4), $\to$
(7) $J \models \mathcal{B}$, (6), $\to$
(8) $J \not\models \mathcal{D}$, (6), $\to$
(9) $J \models \mathcal{C}$, MP (5),(7)
(10) $J \not\models \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, (9), (8), $\to$
(11) $J \not\models \mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})$, (7), (10), $\to$
(12) $J \models \bot$, (3) (11)

(A3) Tarea.

Sea $\mathcal{F}$ cualquier fórmula de PL válida y $\mathcal{F}'$ un ejemplar de $\mathcal{F}$. Por demostrar $\models_I \mathcal{F}'$. Por el teorema de completez sabemos que $\vdash \mathcal{F}$, es decir existe una prueba de $\mathcal{F}$:

$$\begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_k \end{array}$$

donde $\mathcal{B}_k$ es $\mathcal{F}$. Sean $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2, \ldots, \mathcal{B}'_k$ los ejemplares de las sustituciones correspondientes a $\mathcal{F}'$; $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ tienen que ser axiomas y $\mathcal{B}_3$ axioma o modus ponens de los anteriores. Por lo anterior

$$\models \mathcal{B}'_1$$
$$\models \mathcal{B}'_2$$

y por la propiedad (III) entonces también

$$\models_I \mathcal{B}'_3.$$

Repiendo este proceso:

$$\begin{gathered} \models_I \mathcal{B}'_1 \\ \models_I \mathcal{B}'_2 \\ \vdots \\ \models_I \mathcal{B}'_k \end{gathered}$$

entonces $\models_I \mathcal{F}'$. □

Lema 9. *Si t es un término, I interpretación tales que* free$(t) \subset \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ *y J, K dos variaciones de I tales que*

$$\alpha_J[x_{i_1}] = \alpha_K[x_{i_1}], \ldots, \alpha_J[x_{i_k}] = \alpha_K[x_{i_k}]$$

entonces

$$\alpha_J[t] = \alpha_K[t].$$

Demostración. Por inducción sobre m el número de símbolos función que forman t.

$m = 0$: Tenemos dos casos t es constante o variable. Si t es una constante a (free$(a) = \varnothing$)). Como J, K son variaciones de I entonces coinciden con I excepto en ciertas variables, luego como a no es una variable:

$$\alpha_J[t] = \alpha_J[a] = \alpha_I[a] = \alpha_K[a] = \alpha_K[t]$$

Si t es una variable, como free$(t) \subset \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ entonces t es x_{i_j}, luego

$$\begin{aligned} \alpha_J[t] &= \alpha_J[x_{i_j}] \\ &= \alpha_K[x_{i_j}] && \text{por hipótesis} \\ &= \alpha_K[t]. \end{aligned}$$

$m > 0$: t es $f(t_1, \ldots, t_n)$ con cada término t_i con menos de m símbolos función. Supongamos cierto el resultado cuando se tienen $< m$

símbolos función. Entonces $\alpha_J[t_1] = \alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_J[t_n] = \alpha_K[t_n]$. Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha_J[t] &= \alpha_J[f(t_1, \ldots, t_n)] \\
&= \alpha_J[f](\alpha_J[t_1], \ldots, \alpha_J[t_n]), && \text{por definición,} \\
&= \alpha_I[f](\alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_K[t_n]), && \text{por hip. de inducción} \\
&= \alpha_K[f](\alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_K[t_n]) \\
&= \alpha_K(f(t_1, \ldots, t_n)) \\
&= \alpha_K[t].
\end{aligned}$$

□

(1) En el ejemplo 105 se demostró que

$$\forall x. \mathcal{F} \Leftrightarrow \neg(\exists x. \neg\mathcal{F})$$

como consecuencia

$$\exists x. \mathcal{F} \Leftrightarrow \neg\forall x. \neg\mathcal{F}$$

por lo que sintánticamente el cuantificador existencial $\exists$se puede considerar como una abreviatura de $\neg\forall x. \neg$. En lo que sigue consideraremos a $\exists x$ como tal abreviatura.

(2) Recordemos que:
   (a) Un átomo es un predicado aplicado a términos:

   $$p(t_1, \ldots, t_n)$$

   (b) Una literal es un átomo o su negación:

   $$p(t_1, \ldots, t_n), \neg p(t_1, \ldots, t_n).$$

   (c) Una fórmula es:
      - literal
      - aplicación de conectivos a fórmulas
      - aplicación de cuantificadores a fórmulas

Propiedad 16 (VIII)**.** *Sea $\mathcal{B}$ una fórmula, I una interpretación, J, K dos variaciones de I.*

Si $\operatorname{free}(\mathcal{B}) \subset \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ *y* $\alpha_J[x_{i_1}] = \alpha_K[x_{i_1}], \ldots, \alpha_K[x_{i_k}] = \alpha_K[x_{i_k}]$ *entonces*

$$J \models \mathcal{B} \text{ ssi } K \models \mathcal{B}.$$

Demostración. Sea $n = \Theta(\mathcal{B})$ (i.e., n es el número de conectivos mas el número de cuantificadores). Se procede por inducción sobre n.

$n = 0$: $\mathcal{B}$ es de la forma $p(t_1, \ldots, t_n)$ con $t_1, \ldots, t_n$ términos y p símbolo predicado. Por hipótesis:

$$\begin{aligned}
\mathrm{free}(t_1) &\subset \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \\
\mathrm{free}(t_2) &\subset \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \\
&\vdots \\
\mathrm{free}(t_n) &\subset \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}
\end{aligned}$$

entonces, por el Lema 9 obtenemos que

$$\alpha_J[t_1] = \alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_J[t_n] = \alpha_K[t_n] \tag{10}$$

luego

$$\begin{aligned}
\alpha_J[\mathcal{B}] &= \alpha_J[p(t_1, \ldots, t_n)] \\
&= \alpha_J[p](\alpha_J[t_1], \ldots, \alpha_J[t_n]) && \text{por definición,} \\
&= \alpha_I[p](\alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_K[t_n]) && \text{pues } J \text{ es variación de } I \text{ y (10)} \\
&= \alpha_K[p](\alpha_K[t_1], \ldots, \alpha_K[t_n]) && \text{pues } K \text{ es variación de } I \\
&= \alpha_K[\mathcal{B}]
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
J \models \mathcal{B} \text{ ssi } & J \models p(t_1, \ldots, t_n) && \text{pues } \mathcal{B} \text{ es } p(t_1, \ldots, t_n) \\
\text{ssi } & \alpha_J[p(t_1, \ldots, t_n)] = \mathbf{true} && \text{por definición} \\
\text{ssi } & \alpha_K[p(t_1, \ldots, t_n)] = \mathbf{true} && \text{por lo anterior} \\
\text{ssi } & K \models p(t_1, \ldots, t_n) && \text{por definición} \\
\text{ssi } & K \models \mathcal{B} && \text{pues } \mathcal{B} \text{ es } p(t_1, \ldots, t_n)
\end{aligned}$$

$n > 0$: Supongamos cierto el resultado para fórmulas $\mathcal{F}$ con $\Theta(\mathcal{F}) < n = \Theta(\mathcal{B})$. Tenemos varios casos para $\mathcal{B}$:
Caso $\mathcal{B}$ es $\neg\mathcal{C}$: necesariamente $\Theta(\mathcal{C}) < n$, luego

$$\begin{aligned}
J \models \mathcal{B} \text{ ssi } & J \models \neg\mathcal{C} \\
\text{ssi } & J \not\models \mathcal{C} \\
\text{ssi } & K \not\models \mathcal{C} && \text{hip. de inducción,} \\
\text{ssi } & K \models \neg\mathcal{C} \\
\text{ssi } & K \models \mathcal{B}
\end{aligned}$$

Caso $\mathcal{B}$ es $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$: necesariamente $\Theta(\mathcal{C}), \Theta(\mathcal{D}) < n$,

$$\begin{aligned} J \models \mathcal{B} &\text{ ssi } J \models \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \\ &\text{ ssi } J \models \mathcal{C} \text{ y } J \models \mathcal{D} \\ &\text{ ssi } K \models \mathcal{C} \text{ y } K \models \mathcal{D} && \text{hip. de inducción} \\ &\text{ ssi } K \models \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \\ &\text{ ssi } K \models \mathcal{B} \end{aligned}$$

Caso $\mathcal{B}$ es $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$: similar.
Caso $\mathcal{B}$ es $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$: similar.
Caso $\mathcal{B}$ es $\mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{D}$: similar.
Caso $\mathcal{B}$ es $\forall x_j.\mathcal{C}$: Por hipótesis free($\mathcal{C}$) $\subset \{x_{i_i}, \ldots, x_{i_k}\}$, además $\Theta(\mathcal{C}) < n$.

Supongamos que $J \models \mathcal{B}$ para J una variación de I, entonces $J \models \forall x_j.\mathcal{C}$ luego $J \lhd \{x_j \mapsto v\} \models \mathcal{C}$ para todo $v \in D_I$. Sea L la variación $J \lhd \{x_j \mapsto v\}$ y M la variación $K \lhd \{x \mapsto v\}$. Así

(11) $$L \models \mathcal{C}$$

Hay dos subcasos:

(1) $x_j \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$
(2) $x_j \notin \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$

(2)

$$\begin{aligned} \alpha_L[x_{i_1}] &= \alpha_J[x_{i_1}], \text{ pues } x_j \neq x_{i_1} \\ &= \alpha_K[x_{i_1}], \text{ hipótesis} \\ &= \alpha_M[x_{i_1}] \text{ pues } x_j \neq x_{i_1}. \end{aligned}$$

Similarmente $\alpha_L[x_{i_2}] = \alpha_M[x_{i_2}]$, $\ldots$, $\alpha_L[x_{i_k}] = \alpha_M[x_{i_k}]$ luego por hipótesis de inducción

$$L \models \mathcal{C} \text{ ssi } M \models \mathcal{C}$$

por lo que de (11) se sigue que $M \models \mathcal{C}$ esto es

$$K \lhd \{x_j \mapsto v\} \models \mathcal{C}$$

para cualquier $v \in D_I$, de donde se sigue que $K \models \forall x_j.\mathcal{C}$, i.e., $K \models \mathcal{B}$.

En resumen $J \models \mathcal{B}$ implica $K \models \mathcal{B}$. Como el papel de J y K es simétrico se puede obtener que $K \models \mathcal{B}$ implica $J \models \mathcal{B}$, así: $J \models \mathcal{B}$ ssi $K \models \mathcal{B}$.

(1) $x_j = x_{i_s}$, entonces

$$J \lhd \{x_{i_s} \mapsto v\} \models \mathcal{B}$$

para todo v. Tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha_L[x_{i_s}] &= v\\ &= M[x_{i_s}]\end{aligned}$$

y si $x_{i_\ell} \neq x_{i_s}$ entonces

$$\begin{aligned}\alpha_L[x_{i_\ell}] &= \alpha_J[x_{i_\ell}], \text{ pues } L \text{ es variación de } J\\ &= \alpha_K[x_{i_\ell}], \text{ hip.}\\ &= \alpha_M[x_{i_\ell}], \text{ pues } M \text{ es variación de } K\end{aligned}$$

es decir, $\alpha_L[x_{i_1}] = \alpha_M[x_{i_1}], \ldots, \alpha_L[x_{i_k}] = \alpha_M[x_{i_k}]$, luego, podemos usar la hipótesis de inducción para obtener que $L \models \mathcal{C}$ ssi $M \models \mathcal{C}$ y de nuevo, por (11) obtenemos que $M \models \mathcal{C}$, esto es $K \lhd \{x_j \mapsto v\} \models \mathcal{C}$ para todo v, entonces $K \models \forall x_j.\mathcal{C}$, i.e., $K \models \mathcal{B}$ y como antes, como el papel de J y K es simétrico obtenemos que $J \models \mathcal{B}$ ssi $K \models \mathcal{B}$.

□

Propiedad 17 (IX)**.** *Si $\mathcal{B}$ es una fórmula cerrada, entonces, para cualquier interpretación I ocurre que $\models_I \mathcal{B}$ ó $\models_I \neg\mathcal{B}$.*

Demostración. Tenemos dos casos:

(1) cualquier variación J de I cumple que $J \models \neg\mathcal{B}$

(2) existe una variación J de I tal que $J \not\models \neg\mathcal{B}$

(1) En este caso, por definición se sigue que $\models_I \neg\mathcal{B}$.

(2) Se sigue que $J \models \mathcal{B}$. Sea K cualquier otra variación de J. Como $\mathcal{B}$ es cerrada free$(\mathcal{B}) \subset \varnothing$. Luego por vacuidad J y K cumplen las condiciones de la propiedad (VIII). Por lo que $J \models \mathcal{B}$ ssi $K \models \mathcal{B}$. Pero estamos en el caso de que $J \models \mathcal{B}$, de donde $K \models \mathcal{B}$, para cualquier variación K de I, i.e., $\models_I \mathcal{B}$.

□

Definición 113. *Sea t un término, $\mathcal{B}$ una fórmula y x_i una variable. Se dice que t es* **libre para** x_i **en** $\mathcal{B}$ *si cada ocurencia libre de x_i no queda bajo la influencia de ninguna $\forall x_j$ con x_j variable de t.*

La idea es que si t se sustituye por x_i en $\mathcal{B}$:

$$\sigma : \{\ldots, x_i \mapsto t(y,w), \ldots\}, \quad \mathcal{B} : \forall z.(\ldots x_i \ldots)$$

y x_i aparece libre, entonces al hacer la sustitución

$$\mathcal{B}\sigma : \forall z.(\ldots t(y,w) \ldots)$$

las variables de t no quedan acotadas.

Ejemplo 114. $t : x_2$, $\mathcal{B} : q(x_1)$. Entonces x_2 *es libre para* x_1 *en* $\mathcal{B}$ porque x_1 aparece libre y tal aparición no queda bajo la influencia de $\forall x_2$ pues $\mathcal{B}$ no tiene tal cuantificador.

Nótese que si $\sigma : x_1 \mapsto \underbrace{x_2}_{t}$ entonces

$$\mathcal{B}\sigma :\ q(x_2)$$

donde x_2 no está acotada.

Ejemplo 115. Sean

$$t : p(x_1, x_3), \quad \mathcal{B} : (\forall x_2.\, p(x_1, x_2)) \to q(x_1)$$

entonces t es libre para x_1 en $\mathcal{B}$ pues x_1 aparece libre dos veces en $\mathcal{B}$:

1°) $\forall x_2.\, p(x_1, x_2)$

2°) $q(x_1)$

y en la primera no queda bajo la influencia ni de $\forall x_1$ ni de $\forall x_3$ (x_1, x_3 variables de t); mientras que en la segunda no queda bajo la influencia de ningún $\forall$.

En el siguiente ejemplo se usará el cuantificador existencial $\exists$ como una abreviatura de un universal $\forall$.

Ejemplo 116. Sean

$$t : q(x_1, x_3), \quad \mathcal{B} : (\exists x_3.\, \forall x_2.\, q(x_1, x_3)) \to p(x_1)$$

entonces t no es libre para x_1 en $\mathcal{B}$ pues $\mathcal{B}$ es

$$\mathcal{B} : \neg(\forall x_3.\, \neg(\forall x_2.\, q(x_1, x_3)) \to p(x_1))$$

luego la primera ocurrencia de x_1 es libre pero queda bajo la influencia de $\forall x_3$ con x_3 variable de t.

Propiedad 18. *Sea $\mathcal{B}$ una fórmula.*

(1) Si t es un término sin variables entonces para cualquier variable x_i y cualquier fórmula $\mathcal{B}$, t es libre para x_i en $\mathcal{B}$.

(2) Si t es término y ninguna de sus variables es acotada en $\mathcal{B}$, entonces para cualquier variable x_i resulta que t es libre para x_i en $\mathcal{B}$.

(3) x_i es libre para x_i en cualquier fórmula $\mathcal{B}$.

Demostración.

(1) Supongamos que x_i aparece libre en $\mathcal{B}$ entonces x_i no puede quedar bajo la influencia de un $\forall x_j$ con x_j variable de t, pues t no tiene variables.

(2) Supongamos que x_i aparece libre en $\mathcal{B}$, si x_i apareciera bajo la influencia de $\forall x_j$ con x_j variable de t entonces x_j estaría acotada: absurdo.

(3) Supongamos que x_i aparece libre en $\mathcal{B}$, entonces tal aparición no puede estar acotada por $\forall x_i$ (por definición de variable libre).

□

Tarea 18. *¿Es el término $f(x_1, x_2)$ libre para x_1 en las siguientes fórmulas?*

(1) $f(x_1, x_2) \to \forall x_2.\, p(x_2)$

(2) $(\forall x_2.\, p(x_2, a)) \vee (\exists x_2.\, p(x_1, x_2))$

(3) $\forall x_1.\, p(x_1, x_2)$

(4) $\forall x_2.\, p(x_1, x_2)$

(5) $(\forall x_2.\, p(x_2)) \to q(x_1, x_2)$

Lema 10. *Sea t un término libre para x_i en $\mathcal{B}[x_i]$. Entonces*

(1) Una interpretación I satisface $\mathcal{B}[t]$ si y sólo si $I \lhd \{x_i \mapsto \alpha_I[t]\}$ satisface $\mathcal{B}[x_i]$.

(2) Si $I \models \forall x_i.\, \mathcal{B}[x_i]$ entonces $I \models \mathcal{B}[t]$.

6. Teoría Formal K

Así como hay diferentes teorías para la Lógica de Proposiciones, como L, L_1, G' hay varias teorías para la Lógica de Primer Orden. Primero examinaremos la teoría K.

Definición 117. *El* **cálculo de predicados de primer orden** *es la teoría formal K con*

(1) fórmulas: las fórmulas de FOL.

(2) axiomas: sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ fórmulas.

(A1) $\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{B})$

(A2) $(\mathcal{B} \to (\mathcal{C} \to \mathcal{D})) \to ((\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{D}))$

(A3) $(\neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{C}) \to ((\neg\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \to \mathcal{B})$

(A4) $(\forall x_i.\, \mathcal{B}[x_i]) \to \mathcal{B}[t]$ *si t es un término que es libre para x_i en $\mathcal{B}[x_i]$.*

(A5) $(\forall x_i.\, (\mathcal{B} \to \mathcal{C})) \to (\mathcal{B} \to \forall x_i.\, \mathcal{C})$ *si* $x_i \notin \mathrm{free}(\mathcal{B})$.

(3) reglas de inferencia:

(a) Modus ponens:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{B}\\ \mathcal{B} \to \mathcal{C}\end{array}}{\mathcal{C}}$$

(b) Generalización:

$$\frac{\mathcal{B}}{\forall x_i.\,\mathcal{B}}$$

Ejemplo 118.

$$\mathcal{B}, (\forall x_1.\mathcal{B}) \to \mathcal{C} \vdash_K \forall x_1.\,\mathcal{C}$$

Demostración.

(1) $\mathcal{B}$, hip.

(2) $\forall x_1.\,\mathcal{B}$, Generalización (1)

(3) $(\forall x_1.\mathcal{B}) \to \mathcal{C}$, hip.

(4) $\mathcal{C}$, MP (2) (3)

(5) $\forall x_1.\,\mathcal{C}$, Generalización (4)

□

7. Sistema G de Gentzen

Como en G', en G la implicación se indica con $\supset$, mientras que $\to$ se reserva para indicar secuente. A diferencia de K, en G' el cuantificador existencial $\exists$ no se trata como una abreviatura de $\forall$.

Definición 119. *El* **sistema G de Gentzen** *consiste de:*

(1) fórmulas: los secuentes formados por parejas de conjuntos de fórmulas de FOL

(2) axiomas: secuentes $\Gamma \to \Delta$ con $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$.

(3) reglas de inferencia: las de G' además de las siguientes. Sean x, y cualesquiera variables y $\mathcal{B}$ fórmula tales que
(a) y es libre para x en $\mathcal{B}$
(b) $y \notin \mathrm{free}(\mathcal{B})$ excepto si $y = x$
(c) t es libre para x en $\mathcal{B}$
entonces

$$\frac{\Gamma, \mathcal{B}\{x \mapsto t\}, \forall x.\,\mathcal{B}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \forall x.\,\mathcal{B}, \Delta \to \Lambda}\ \forall : izq \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B}\{x \mapsto y\}, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \forall x.\,\mathcal{B}, \Lambda}\ \forall : der$$

$$\frac{\Gamma, \mathcal{B}\{x \mapsto y\}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \exists x.\,\mathcal{B}, \Delta \to \Lambda}\ \exists : izq \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \mathcal{B}\{x \mapsto t\}, \exists x.\,\mathcal{B}, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \exists x.\,\mathcal{B}, \Lambda}\ \exists : der$$

donde $\mathcal{B}\{x \mapsto t\}$ es la sustitución en la fórmula $\mathcal{B}$ indicada por $\sigma : \{x \mapsto t\}$, i.e., $\mathcal{B}\sigma$. Similarmente $\mathcal{B}\{x \mapsto y\}$.

Ejemplo 120. Sea P una variable proposicional.

$$\vdash_{G'} \rightarrow (\exists x.\, P \supset q(x)) \supset (P \supset \exists z.\, q(z))$$

Demostración.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{P \rightarrow P, \exists z.\, q(z)}^{\text{axioma}} \qquad \dfrac{\overbrace{q(x_1), P \rightarrow q(x_1), \exists z.\, q(z)}^{\text{axioma}}}{q(x_1), P \rightarrow \exists z.\, q(z)}\;\exists\text{:der}}{P \supset q(x_1), P \rightarrow \exists z.\, q(z)}\;\supset\text{:izq}}{P \supset q(x_1) \rightarrow P \supset \exists z.\, q(z)}\;\supset\text{:der}}{\exists x.\, P \supset q(x) \rightarrow P \supset \exists z.\, q(z)}\;\exists\text{:izq}}{\rightarrow (\exists x.\, P \supset q(x)) \supset (P \supset \exists z.\, q(z))}\;\supset\text{:der}$$

□

Ejemplo 121.

$$\vdash_G \rightarrow (\forall x.\, p(x) \wedge \exists y.\, q(y)) \supset (p(f(a)) \wedge \exists z.\, q(z))$$

Demostración.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overbrace{p(f(a)), \forall x.\, p(x), \exists y.\, q(y) \rightarrow p(f(a))}^{\text{axioma}} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\overbrace{p(f(a)), \forall x.\, p(x), q(u) \rightarrow q(u), \exists z.\, q(z)}^{\text{axioma}} \\ p(f(a)), \forall x.\, p(x), q(u) \rightarrow q(z)\{z \mapsto u\}, \exists z.\, q(z)\end{array}}{p(f(a)), \forall x.\, p(x), q(y)\{y \mapsto u\} \rightarrow \exists z.\, q(z)}\;\exists\text{ :der}}{p(f(a)), \forall x.\, p(x), \exists y.\, q(y) \rightarrow \exists z.\, q(z)}\;\exists\text{ :izq}}{p(x)\{x \mapsto p(f(a))\}, \forall x.\, p(x), \exists y.\, q(y) \rightarrow p(f(a)) \wedge \exists z.\, q(z)}\;\wedge\text{ :der}}{\forall x.\, p(x), \exists y.\, q(y) \rightarrow p(f(a)) \wedge \exists z.\, q(z)}\;\forall\text{ :izq}}{\forall x.\, p(x) \wedge \exists y.\, q(y) \rightarrow p(f(a)) \wedge \exists z.\, q(z)}\;\wedge\text{ :izq}}{\rightarrow (\forall x.\, p(x) \wedge \exists y.\, q(y)) \supset (p(f(a)) \wedge \exists z.\, q(z))}$$

□

Tarea 19. *De árboles de prueba para las siguientes fórmulas, donde t es un término libre para x en $\mathcal{F}$.*

(1) $\vdash_G \rightarrow (\forall x.\, \mathcal{F}) \supset \mathcal{F}\{x \mapsto t\}$

(2) $\vdash_G \rightarrow \mathcal{F}\{x \mapsto t\} \supset \exists x.\, \mathcal{F}$

Tarea 20. *Pruebe:*

(1) $\vdash_G \rightarrow \neg\forall x.\, \exists y.\, (\neg p(x) \wedge p(y))$

(2) $\vdash_G \rightarrow ((\forall x.\, \mathcal{C}) \supset \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{C} \supset \forall x.\, \mathcal{C})$, *donde* $x \notin \text{free}(\mathcal{C})$,

Bibliografía

[1] Elliot Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, Chapman & Hall, 1991.

[2] A.R. Bradley y Z. Manna, The Calculus of Computation, Springer, 2007.

[3] J.H Gallier, Logic for Computer Science, Wiley, 1986.

[4] S. N. Burris, Logic for Mathematics and Computer Science, Prentice Hall, 1998.