Estructuras Discretas

César Bautista Ramos

Carlos Guillén Galván

Daniel Alejandro Valdés Amaro

Facultad de Ciencias de la Computación

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

1. Conjuntos y Clases

1.1. Predicados y Cuantificadores. Frecuentemente en Matemáticas y Computación nos encontramos con enunciados en los que se incluyen variables como:

$$x > 3,\ x = y + 3 \text{ y } x + y = z.$$

A este tipo de enunciados no se les puede asignar un valor de verdad, es decir, no son ni verdaderos ni falsos si no se especifican los valores de las variables. A continuacin discutiremos las formas en las que las proposiciones pueden producir tales enunciados.

El enunciado "x es mayor que 3" tiene dos partes: la primera, la variable x que es el sujeto del enunciado, y la segunda parte denominada **predicado**, "es mayor que 3", hace referencia a una propiedad que puede tener el sujeto. Si denotamos el enunciado anterior por $P(x)$ donde P denota el predicado "es mayor que 3" y x es la variable. La sentencia $P(x)$ se dice tambin que es el valor de la función proposicional P en x. Así, una vez que se le asigne un valor a la variable x, la sentencia $P(x)$ se convierte en una proposicin y tiene un valor de verdad. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1. Si $P(x)$ denota el enunciado "$x > 3$", ¿cuáles son los valores de verdad de $P(4)$ y $P(2)$?

Solución: Entonces obtenemos la sentencia $P(4)$ haciendo $x = 4$ en el enunciado "$x > 3$" y por tanto, $P(4)$ que es el enunciado "$4 > 3$", es verdadero. Similarmente para $P(2)$, el enunciado "$2 > 3$", es falso.

También podemos tener sentencias que incluyan más de una variable. Por ejemplo, en el enunciado "$x = y + 3$" podemos denotar esta sentencia por $Q(x, y)$, donde x e y son variables y Q es el predicado. Al asignar valores a x e y , la sentencia tiene una tabla y valores de verdad.

Ejemplo 2. $Q(x, y)$ denota el enunciado "$x = y+3$" , ¿cuáles son los valores de verdad de las proposiciones $Q(1, 2)$ y $Q(3, 0)$?

Solución: Haciendo $x = 1$ y $y = 2$ en $Q(x, y)$ tenemos $Q(1, 2)$ que es el enunciado "$1 = 2+3$" que es falso. La sentencia $Q(3, 0)$ es el enunciado "$3 = 0+3$" que es verdadero.

De manera similar, podemos denotar como $R(x, y, z)$ el enunciado "x+y=z", que al asignarle valores a las variables x, y y z, dicha sentencia tendr una tabla de verdad.

Ejemplo 3. ¿Cules son los valores de verdad de las proposiciones $R(1, 2, 3)$ y $R(0, 0, 1)$?

Solución: Haciendo $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$ en $R(x, y, z)$ tenemos que $R(1, 2, 3)$ es el enunciado "$1 + 2 = 3$" que es verdadero. Tambin se ve que $R(0, 0, 1)$, con el enunciado "$0 + 0 = 1$" que es falso.

En general, una sentencia que incluye las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se puede denotar como:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Una sentencia de la forma $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es el valor de la **función proposicional** P en la n-tupla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. A P también se le llama **predicado**.

En el siguiente ejemplo, las funciones proposicionales se usan en la evaluacin de expresiones para una condicin de tipo **if** en un programa:

Ejemplo 4. Consideremos la sentencia

$$\textbf{if } x > 0 \textbf{ then } x := x + 1.$$

Solución: Cuando el programa llega a esta línea, el valor de la variable x en este punto de la ejecucin se inserte en $P(x)$, que es "$x > 0$". Si $P(x)$ es verdadera para este valor de x, la sentencia de asignacin $x := x + 1$ se ejecuta, por loq ue el valor de x se incrementa en 1. Si $P(x)$ es falsa para este valor de x, la sentencia de asignación no se ejecuta, por lo que el valor de x no cambia.

Tarea 1. *Denotemos por $P(x)$ la sentencia $x \leq 4$. ¿Cuáles son los valores de verdad siguientes?*

(1) $P(0)$
(2) $P(4)$
(3) $P(6)$

Tarea 2. *Denotemos por $P(x)$ la sentencia "la palabra x contiene la letra a". ¿Cuáles son los valores de verdad siguientes?*

(1) $P($*naranja*$)$
(2) $P($*verdadero*$)$
(3) $P($*limón*$)$
(4) $P($*falsa*$)$

Tarea 3. *Denotemos por $Q(x, y)$ la sentencia "y es la capital de x". ¿Cuáles son los valores de verdad siguientes?*

(1) $P($*Francia, París*$)$
(2) $P($*Bolivia, Tegucigalpa*$)$
(3) $P($*Honduras, La Paz*$)$
(4) $P($*Colombia, Cartagena*$)$

Tarea 4. *Declarar el valor de x tras ejecutar la sentencia* **if** $P(x)$ **then** $x := 1$*, donde $P(x)$ es la sentencia $x > 1$ si el valor de x cuando se llega a la sentencia es:*

(1) $x = 0$
(2) $x = 1$
(3) $x = 2$

1.1.1. *Cuantificadores.* Cuando a todas las variables de una función proposicional se le han asignado valores, la sentencia resultante se convierte en una proposición con un cierto valor de verdad. Sin embargo, hay otra forma importante, llamada **cuantificación**, de crear una proposición a partir de una función proposicional.

Cuantifiacador Universal

Muchas sentencias matemáticas imponen que una propiedad es verdadera para todos los valores de una variable en un dominio particular, llamado el **universo de discurso** o

dominio. Tales sentencias se expresan utilizando un cuantificador universal. La cuantificación universal de una función proposicional es la proposición que afirma que $P(x)$ es verdaderapara todos los valores de x en el dominio. El dominio especifica los posibles valores de la variable x.

DEFINICIÓN 1. *La* ***cuantificación universal*** *de $P(x)$ es la proposición $P(x)$ es verdadera para todos los valores x del dominio.*

La notación

$$\forall x\ P(x)$$

denota la cuantificación universal de $P(x)$. Llamaremos al sḿbolo $\forall$ el cuantificador universal*, tal que la proposición $\forall x\ P(x)$ se lee como:*

- *para todo x $P(x)$*
- *para cada x $P(x)$ o*
- *para cualquier x $P(x)$.*

EJEMPLO 5. Sea $P(x)$ el enunciado $x + 1 > x$, ¿cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x\ P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Solución: Como $P(x)$ es verdadera para todo número real x, la cuantificación

$$\forall x\ P(x)$$

es verdadera.

EJEMPLO 6. Sea $Q(x)$ el enunciado $x < 2$, ¿cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x\ Q(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Solución: $Q(x)$ no es verdadera para todo número real x. Por ejemplo, $Q(3)$ es falsa, por tanto

$$\forall x\ Q(x)$$

es falsa.

Cuando todos los elementos del dominio se pueden enumerar (escribiéndolos, por ejemplo como $x_1, x_2, \ldots, x_n$) se tiene que la cuantificación universal $\forall x\ P(x)$ es lo mismo que la conjunción

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n),$$

puesto que esta conjunción es verdadera si, y sólo si $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ son todas verdaderas.

EJEMPLO 7. ¿Cuál es el valor de verdad de $\forall x\ P(x)$, donde $P(x)$ es el enunciado $x^2 < 10$ y el dominio consiste en los enteros positivos menores o iguales que 4?

Solución: La sentencia $\forall x\ P(x)$ es lo mismo que la conjunción

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(x_3) \wedge P(x_4),$$

puesto que el dominio consiste en los enteros 1, 2, 3 y 4. Como $P(4)$, la sentencia $4^2 < 10$ es falsa y tenemos que $\forall x\ P(x)$ es tambin falsa.

Ejemplo 8. ¿Qué significa la sentencia $\forall x\ T(x)$ si $T(x)$ es el enunciado "x tiene un padre y una madre" y el dominio consiste en toda la gente?

Solución: La sentencia $\forall x\ T(x)$ significa que toda persona x tiene un padre y una madre. La sentencia se puede expresar en lenguaje natural como "Toda persona tiene dos padres". La sentencia es verdadera excepto para seres clonados (si los hay).

Ejemplo 9. ¿Cuál es el valor de verdad de $\forall x(x^2 \geq x)$, si el dominio consiste en todos los números reales y cuál es el valor de verdad si el dominio son todos los enteros?

Solución: Teniendo en cuenta que $x^2 \geq x$ si, y sólo si, $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$. Consecuentemente, $x^2 \geq x$ si, y sólo si, $x \leq 0$ o $x \geq 1$. Así, tenemos que $\forall x(x^2 \geq x)$ es falsa si el dominio consiste en todos los números reales (ya que la desigualdad es falsa para los números reales x tales que $0 < x < 1$). Sin embargo, si el dominio consiste en los enteros $\forall x(x^2 \geq x)$ es verdadera por no haber enteros x tales que $0 < x < 1$.

Para mostrar que una sentencia de la forma $\forall x\ P(x)$ es falsa, donde $P(x)$ es una función proposicional, sólo necesitamos encontrar un valor de x del dominio para el cual $P(x)$ sea falsa. Es decir, necesitamos encontrar un contraejemplo x de la sentencia $\forall x\ P(x)$.

Ejemplo 10. Supongamos que $P(x)$ es $x^2 > 0$. Para mostrar que la sentencia $\forall x\ P(x)$ es falsa cuando el dominio sea todos los enteros, daremos un contraejemplo. Vemos que $x = 0$ es un contraejemplo, ya que $x^2 = 0$, por lo que no es mayor que 0.

Cuantificador Existencial

Muchas sentencias matemáticas afirman que hay un elemento con una cierta propiedad. Tales sentencias se expresan mediante cuantificadores existenciales. Con un cuantificador existencial formamos una proposición que es verdadera si y sólo si $P(x)$ es verdadera para al menos un valor de x en el dominio.

Definición 2. *La* ***cuantificación existencial*** *de $P(x)$ es la proposición "Existe un elemento x en el dominio tal que $P(x)$ es verdadera". Usamos la notación*

$$\exists x\ P(x)$$

para la cuantificación existencial de $P(x)$. El símbolo $\exists$ se denomina cuantificador existencial. La cuantificación existencial $\exists x\ P(x)$ se lee como

- *Hay un x tal que $P(x)$*
- *Hay al menos un x tal que $P(x)$ o*
- *Para algún x $P(x)$.*

A continuación ilustraremos el uso del cuantificador existencial en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 11. Sea $P(x)$ el enunciado $x > 3$. ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x\ P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Solución: Como $x > 3$ es verdadero, por ejemplo, para $x = 4$, la cuantificación existencial de $P(x)$ es verdadera.

EJEMPLO 12. Sea $Q(x)$ el enunciado $x = x + 1$. ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x\ Q(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Solución: Como $Q(x)$ es falsa para todo número real x, la cuantificación existencial de $\exists x\ Q(x)$ es falsa.

EJEMPLO 13. ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x\ P(x)$, donde $P(x)$ es el enunciado $x^2 > 10$ y el dominio consiste en los enteros positivos menores o iguales que 4?

Solución: Como el dominio es $\{1, 2, 3, 4\}$, la proposición $\exists x\ P(x)$ es lo mismo que la disyunción

$$P(1) \vee P(2) \vee P(x_3) \vee P(x_4).$$

Como $P(4)$, que es el enunciado $4^2 > 10$ es verdadero, tenemos que $\exists x\ P(x)$ es verdadera.

En la tabla 1 se resume el significado de los cuantificadores universales y existenciales.

Sentencia	¿Cuándo es verdadera?	¿Cuándo es falsa?
$\forall x\ P(x)$	$P(x)$ es verdadera para todo x	Hay un x para el que $P(x)$ es falsa
$\exists x\ P(x)$	Hay un x para el que $P(x)$ es verdadera	$P(x)$ es falsa para todo x

TABLA 1. Cuantificadores

Los cuantificadores $\forall$ y $\exists$ tienen una mayor precedencia que todos los demás operadores lógicos del cálculo proposicional. Por ejemplo, $\forall x\ P(x) \vee Q(x)$ es la disjunción de $\forall x\ P(x)$ y $Q(x)$, y signiifica $(\forall x\ P(x)) \vee Q(x)$ en lugar de $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$.

Cuando se quiere determinar el valor de verdad de una cuantificación, a veces es útil realizar una búsqueda sobre todos los posibles valores del dominio. Supongamos que hay n objetos en el dominio de la variable x, para determinar si $\forall x\ P(x)$ es verdadera podemos "barrer" los n valores de x y ver si $P(x)$ es verdadera para todos ellos. Si encontramos un valor de x para el cual $P(x)$ es falsa, habremos demostrado que $\forall x\ P(x)$ es falsa. En caso contrario, $\forall x\ P(x)$ es verdadera. Para ver si $\forall x\ P(x)$ es verdadera, "barremos" los n valores posibles de x buscando algún valor para el cual $P(x)$ sea verdadera. si encontramos uno, entonces $\exists x\ P(x)$ es verdadera. Si no encontramos tal valor de x, habremos determinado que $\exists x\ P(x)$ es falsa. Debido a que este procedimiento de búsqueda no puede ser aplicado si el dominio se compone de elementos infinitos, aun así sigue siendo una forma útil de trabajar con cuantificadores.

TAREA 5. *Sea $P(x)$ la sentencia $x = x^2$. Si el dominio consiste en todos los enteros, ¿cuáles son los valores de verdad siguientes?*

(1) $P(0)$
(2) $P(1)$
(3) $P(2)$
(4) $P(-1)$
(5) $\exists x\ P(x)$

(6) $\forall x\ P(x)$

Variables Ligadas

Definición 3. *Cuando un cuantificador se usa sobre la variable x o cuando asignamos un valor a esta variable, decimos que la variable aparece* ***ligada****. Una variable que no aparece ligada por un cuantificador o fijada a un valor particular se dice que es* ***libre****.*

Todas las variables que aparecen en una función proposicional deben ser ligadas para convertirla en proposición. Esto se puede hacer utilizando una combinación de cuantificadores universales, existenciales y asignación de valores.

La parte de una expresión lógica a la cual se aplica el cuantificador se llama **ámbito** de este cuantificador. Consecuentemente, una variable es libre si está fuera del ámbito de todos los cuantificadores de la fórmula.

Ejemplo 14. En la sentencia $\exists x\ Q(x, y)$, la variable x está ligada por el cuantificador existencial $\exists x$, pero la variable y es libre porque no está ligada a un cuantificador y nos se le asigna valor alguno a esta variable.

En la sentencia $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x\ R(x)$ todas las variables están ligadas. El ámbito del primer cuantificador, $\exists x$, es la expresión $P(x) \wedge Q(x)$ porque $\exists x$ se aplica sólo a esta expresión y no al resto de la sentencia. De forma similar, el ámbito del segundo cuantificador, $\forall x$, es la expresión $R(x)$. Es decir, el cuantificador existencial liga la variable x en $P(x) \wedge Q(x)$ y el cuantificador universal liga la variable x en $R(x)$.

Negaciones

Con frecuencia hace falta considerar la negación de una expresión cuantificada. Por ejemplo, consideremos la negacin del enunciado “Todos los estudiantes de la clase han cursado una materia de cálculo”.

Esta sentencia es una cuantificación universal de la forma $\forall x\ P(x)$ donde $P(x)$ es la sentencia “x ha cursado una materia de cálculo”. La negación de esta sentencia es “No se cumple que todos los estudiantes de la clase hayan cursado una materia de cálculo”, lo cual es equivalente a “Hay al menos un estudiante en la clase que no ha cursado una materia de cálculo”. Y esto es simplemente la cuantificación existencial de la negación de la función proposicional original, es decir, $\exists x\ \neg P(x)$.

Así, tenemos que:

$$\neg \forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x).$$

supongamos que queremos negar una cuantificación existencial. Por ejemplo, consideremos la proposición “Hay un estudiante en la clase que ha cursado una materia de cálculo”, siendo una cuantificación existencial $\exists x\ Q(x)$, donde $Q(x)$ es el predicado “x ha cursado una materia de cálculo”. Esto es quivalente a “Ninguno de los estudiantes de la clase ha cursado una materia de cálculo”, que es justamente la cuantificación universal de la negación de la función proposicional original. Sería equivalente, en lenguaje poco común, a “Para todo estudiante se cumple que no ha cursado una materia de cálculo”, o expresado con cuantifiacadores, $\forall x\ \neg P(x)$.

Es decir:

$$\neg\exists x\ Q(x) \equiv \forall x\ \neg Q(x).$$

Las negaciones se resumen en la tabla 2.

Negación	Fórmula equivalente	¿Cuándo es verdadera?	¿Cuándo es falsa?
$\neg\exists x\ P(x)$	$\forall x\ \neg Q(x)$	Para cada x, $P(x)$ es falsa	Hay un x para el que $P(x)$ es verdadera
$\neg\forall x\ P(x)$	$\exists x\ \neg P(x)$	Hay un x para el que $P(x)$ es falsa	$P(x)$ es verdadera para cada x

TABLA 2. Negación de cuantificadores

Observación: Cuando el dominio de un predicado $P(x)$ consiste en n elementos, donde n es un entero positivo, las reglas de la negación de sentencias cuantificadas son exactamente las mismas que las leyes de De Morgan. Esto es así porque $\neg\forall x\ P(x)$ es lo mismo que $\neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n))$, equivalente a $\neg(P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \ldots \vee \neg P(x_n))$ por las leyes de De Morgan, lo que equivale a $\forall x\ \neg P(x)$.

EJEMPLO 15. ¿Cuáles son las negaciones de los enunciados "Hay un político honesto" y "Todos los estadounidenses comen hamburguesas"?

Solución: Denotemos como $H(x)$ a "x es honesto". La sentencia 'Hay un político honesto" se representa por $\exists x\ H(x)$, donde el dominio consiste en todos los políticos. La negación de la sentencia es $\neg\exists x\ H(x)$, lo que equivale a $\forall x\ \neg H(x)$. Esta negación se puede expresar como "Todo político es deshonesto". (*Nota*: En lenguaje natural, la frase "Los políticos son deshonestos" puede ser ambigua. A veces esta frase se utiliza para expresar que "No todos los políticos es honestos". Por eso no utilizamos esta frase para expresar la negación).

Sea $C(x)$ el enunciado "x come hamburguesas", entonces "Todos los estadounidenses comen hamburguesas" se representa por $\forall x\ C(x)$, donde el dominio consiste en todos los estadounidenses. La negación de esta sentencia es $\neg\forall x\ C(x)$, que es equivalente a $\exists x\ \neg C(x)$. Esta negación se puede expresar de muchas maneras, entre las que se incluyen "Algunos estadounidenses no comen hamburguesas" y "Hay algún estadounidense que no come hamburguesas"?.

EJEMPLO 16. ¿Cuáles son las negaciones de las sentencias $\forall x\ (x^2 > x)$ y $\exists x\ (x^2 = 2)$?

Solución: La negación de $\forall x\ (x^2 > x)$ es la sentencia $\neg\forall x\ (x^2 > x)$, que es equivalente a $\exists x\ \neg(x^2 > x)$ y que también se puede escribir de la forma $\exists x\ (x^2 \leq x)$. La negación de $\exists x\ (x^2 = 2)$ es $\neg\exists x\ (x^2 = 2)$, equivalente a $\forall x\ \neg(x^2 = 2)$ y se pude reescribir como $\forall x\ (x^2 \neq 2)$. Los valores de verdad de estas sentencias depende del dominio.

Traducción de oraciones en lenguaje natural a lenguaje formal

Traducir frases del lenguaje natural a expresiones lógicas es una tarea crucial en matemáticas, programación lógica, inteligencia artificial, ingeniería de software y muchas otras áreas. Formalizar expresiones del lenguaje natural en expresiones lógicas se hace más complejo cuando se requieren cuantificadores, además de que puede haber diferentes formas de traducir una frase particular. Utilizaremos algunos ejemplos para ilustrar cómo se formalizan afirmaciones del lenguaje natural en lógica de predicados. El objetivo es producir expresiones lógicas simples y útiles.

Ejemplo 17. Expresar la frase "Todo estudiante de esta clase ha estudiado cálculo" utilizando predicados y cuantificadores.

Solución: Primero, reescribimos la sentencia de tal forma que podamos identificar con claridad los cuantificadores que debemos emplear. Así, obtenemos:

"Para todo estudiante de esta clase, ese estudiante ha estudiado cálculo".

Luego introducimos la variable x, de tal forma que nuestra sentencia se convierte en:

"Para todo estudiante x de esta clase, x ha estudiado cálculo".

Continuando, introducimos el predicado $C(x)$, que esl enunciado "x ha estudiado cálculo". Por lo tanto, si el dominio de x consiste en los estudiantes de la clase, podemos traducir nuestra frase como $\forall x\ C(x)$.

No obstante, hay otras opciones correctas ya que se pueden considerar diferentes dominios o diferentes predicados. La opción que seleccionemos dependerá del razonamiento que queremos realizar a continuación. Por ejemplo, podemos estar interesados en un grupo de personas más amplio que el de esa clase en particular. Si cambiamos el dominio, tomando el conjunto de todas las personas, habremos de expresar nuestro enunciado como:

"Para toda persona x, si la persona x es un estudiante de esta clase, entonces x ha estudiado cálculo".

Si $S(x)$ representa el predicado de que la persona x está en la calse, nuestra sentencia se puede expresar como $\forall x\ (S(x) \Rightarrow C(x))$. Sin embargo debemos tener cuidado, recuerde que nuestra sentencia *no puede* expresarse como $\forall x\ (S(x) \wedge C(x))$, puesto que esta sentencia afirmaría que todas las personas son estudiantes de la clase y han estudiado cálculo.

Finalmente, cuando estamos interesados en los estudios de una persona, aparte del cálculo, podríamos preferir usar un cuantificador de dos variables $Q(x, y)$ para la frase "el estudiante x ha estudiado la asignatura y". Así podríamos reemplazar $C(x)$ por $Q(x, \text{cálculo})$ en las dos opciones que hemos elegido para obtener $\forall x\ Q(x, \text{cálculo})$ o $\forall x\ (S(x) \Rightarrow Q(x, \text{cálculo}))$.

Ejemplo 18. Formalizar las frases "Algún estudiante de esta clase ha visitado Inglaterra" y "Todo estudiante de esta clase ha visitado bien Inglaterra o bien Argentina".

Solución: La frase "Algún estudiante de esta clase ha visitado Inglaterra" significa que

"Hay algún estudiante en esta clase que tiene como atributo que ese estudiante ha visitado Inglaterra".

Introduciendo una variable x, de tal forma que nuestra frase se convierte en

"Hay un estudiante x en esta clase que tiene como atributo que x ha visitado Inglaterra".

Introducimos el predicado $I(x)$, que es el enunciado "x ha visitado Inglaterra". Si el dominio para x consiste en los estudiantes de esta clase, se puede traducir esta primera frase como $\exists x\ I(x)$.

No obstante, si estamos interesados en otras personas además de las de la clase, tomamos la frase de forma diferente y la frase se puede expresar como:

"Hay una persona x que tiene como atributos que x es un estudiante de esta clase y que x ha visitado Inglaterra".

En este caso, el dominio para la variable x son todas las personas. Introducimos el predicado $S(x)$, "x es un estudiante de esta clase" y nuestra solución se convierte en $\exists x\ (S(x) \wedge I(x))$, ya que la frase hace referencia a una persona x que es estudiante de la clase y que ha visitado Inglaterra. Nota: La sentencia so puede expresarse como $\exists x\ (S(x) \Rightarrow I(x))$, la cual es correcta cuando todos en la clase han visitado Inglaterra.

De forma similar, la segunda frase se puede expresar como:

"Para toda persona x, si x tiene como atributo que x ha visitado Inglaterra o x ha visitado Argentina".

Sea $C(x)$ la sentencia "x ha visitado Argentina". Siguiendo el razonamiento anterior, vemos que si el dominio de x consiste en los estudiantes de esta clase, esta segunda sentencia se puede expresar $\forall x\ (C(x) \vee I(x))$. Sin embargo, si el dominio de x consiste en todas las personas, la frase se puede expresar como:

"Para toda persona x, si x es un estudiante de esta clase, entonces x ha visitado Inglaterra o x ha visitado Argentina".

En este caso la sentencia se puede expresar como $\forall x\ (S(x) \Rightarrow (C(x) \vee I(x)))$.

En lugar de utilizar los predicados $I(x)$ y $C(x)$ para representar que x ha visitado Inglaterra y que x ha visitado Argentina, respectivamente, podríamos haber usado un predicado de dos variables $V(x, y)$ para representar "x ha visitado el país y". En este caso, $V(x, \text{Inglaterra})$ y $V(x, \text{Argentina})$ tendrían el mismo significado que $I(x)$ y $C(x)$ y podrían reemplazarlas en nuestras respuestas. Si estamos trabajando con muchas frases relacionadas con gente que visita diferentes paíces, podríamos preferir la opción de un predicado de dos variables. En otros casos, por simplicidad, nos quedaríamos con los predicados de una variable $I(x)$ y $C(x)$.

TAREA 6. *Sea $P(x)$ la sentencia "x asiste a más de cinco horas de clase al día", donde el dominio de x consiste en todos los estudiantes. Expresar las siguientes cuantificaciones en lenguaje natural:*

(1) $\exists x\ P(x)$
(2) $\forall x\ P(x)$
(3) $\exists x\ \neg P(x)$
(4) $\forall x\ \neg P(x)$

TAREA 7. *Sea $N(x)$ la sentencia "x ha visitado Alemania", donde el dominio de x consiste en todos los estudiantes de tu clase. Expresar las siguientes cuantificaciones en lenguaje natural:*

(1) $\exists x\ N(x)$
(2) $\forall x\ N(x)$
(3) $\neg\exists x\ N(x)$
(4) $\exists x\ \neg N(x)$
(5) $\neg\forall x\ N(x)$
(6) $\forall x\ \neg N(x)$

Tarea 8. *Traducir las siguientes sentencias en el lenguaje natural, donde $C(x)$ la sentencia "x es un cómico" y $F(x)$ es "x es divertido", y el dominio consiste en todos las personas.*

(1) $\forall x\ (C(x) \Rightarrow F(x))$
(2) $\forall x\ (C(x) \wedge F(x))$
(3) $\exists x\ (C(x) \Rightarrow F(x))$
(4) $\exists x\ (C(x) \wedge F(x))$

Tarea 9. *Traducir las siguientes sentencias en el lenguaje natural, donde $R(x)$ la sentencia "x es un conejo" y $H(x)$ es "x salta", y el dominio consiste en todos los animales:*

(1) $\forall x\ (R(x) \Rightarrow H(x))$
(2) $\forall x\ (R(x) \wedge H(x))$
(3) $\exists x\ (R(x) \Rightarrow H(x))$
(4) $\exists x\ (R(x) \wedge H(x))$

Tarea 10. *Sea $P(x)$ la sentencia "x habla ruso" y $Q(x)$ es "x conoce el lenguaje de programación C++". Expresar cada una de las siguientes sentencias en términos de $P(x)$, $Q(x)$, cuantificadores y conectivos lógicos. El dominio para los cuantificadores consiste en todos los estudiantes de tu facultad:*

(1) *Hay un estudiante en tu facultad que habla ruso y conoce C++.*
(2) *Hay un estudiante en tu facultad que habla ruso pero no conoce C++.*
(3) *Todos los estudiantes de tu facultad hablan ruso o conocen C++.*
(4) *Ningún estudiante de tu facultad habla ruso o conoce C++.*

Tarea 11. *Sea $C(x)$ la sentencia "x tiene un gato", $D(x)$ es "x tiene un perro" y $F(x)$ es "x tiene un hámster". Expresar cada una de las siguientes sentencias en términos de $C(x)$, $D(x)$, $F(x)$ cuantificadores y conectivos lógicos. El dominio para los cuantificadores consiste en todos los estudiantes de tu clase:*

(1) *Un estudiante de tu clase tiene un gato, un perro y un hámster.*
(2) *Todos los estudiantes de tu clase tienen un gato, un perro o un hámster.*
(3) *Algún estudiante de tu clase tiene un gato y un hámster, pero no un perro .*
(4) *Ningún estudiante de tu clase tiene un gato, un perro y un hámster.*
(5) *Para cada uno de los tres animales, gatos, perros y hámsters, hay un estudiante de tu clase que tiene uno de esos animales como mascota.*

Tarea 12. *Sea $Q(x)$ la sentencia $x+1 > 2$. Si el dominio consiste en todos los enteros, ¿cuáles son los valores de verdad siguientes?*

(1) $Q(0)$

(2) $Q(-1)$
(3) $Q(1)$
(4) $\exists x\ Q(x)$
(5) $\forall x\ Q(x)$
(6) $\exists x\ \neg Q(x)$
(7) $\forall x\ \neg Q(x)$

Tarea 13. *Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias si el dominio consiste en todos los números enteros*

(1) $\forall n\ (n+1 > n)$
(2) $\exists n\ (2n = 3n)$
(3) $\exists n\ (n = -n)$
(4) $\forall n\ (n^2 \geq n)$

Tarea 14. *Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias si el dominio consiste en todos los números reales*

(1) $\exists x\ (x^3 = -1)$
(2) $\forall x\ ((-x)^2 = x^2)$
(3) $\exists x\ (x^4 < x^2)$
(4) $\forall x\ (2x > x)$

Tarea 15. *Suponer que el dominio de la función proposicional $P(x)$ consiste en los enteros 0, 1, 2, 3 y 4. Escriba cada una de esas proposiciones usando disyunciones, conjunciones y negaciones.*
$\exists x\ P(x)$
$\forall x\ P(x)$
$\exists x\ \neg P(x)$
$\forall x\ \neg P(x)$
$\neg\exists x\ P(x)$
$\neg\forall x\ P(x)$

Tarea 16. *Suponer que el dominio de la función proposicional $Q(x)$ consiste en los enteros -2, -1, 0, 1 y 2. Escriba cada una de esas proposiciones usando disyunciones, conjunciones y negaciones.*
$\exists x\ P(x)$
$\forall x\ P(x)$
$\exists x\ \neg P(x)$
$\forall x\ \neg P(x)$
$\neg\exists x\ P(x)$
$\neg\forall x\ P(x)$

Tarea 17. *Traducir de dos formas cada una de estas frases a expresiones lógicas utilizando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos. En primer lugar, el dominio consistirá en los estudiantes de la clase, y en segundo lugar, consistirá en los estudiantes de tu clase, y en segundo lugar, será el conjunto de todas las personas.*

(1) *Alguien de tu clase habla hindú.*
(2) *Todos en tu clse son amigables.*
(3) *Hay una persona en tu clase que no nacó en Puebla.*
(4) *Un estudiante de la clase ha visto una pelácula.*
(5) *Ningún estudiante de la clase ha cursado la asignatura de Cálculo.*

TAREA 18. *Traducir de dos formas cada una de estas frases a expresiones lógicas utilizando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos. En primer lugar, el dominio consistirá en los estudiantes de la clase, y en segundo lugar, consistirá en los estudiantes de tu clase, y en segundo lugar, será el conjunto de todas las personas.*

(1) *Todos en la clase tienen un telé fono celular.*
(2) *Alguien en la case ha visto una película francesa.*
(3) *Hay una persona en la clase que no sabe nadar.*
(4) *Todos los estudiantes de la clase saben resolver ecuaciones de segundo grado.*
(5) *Algún estudiante de clase no quiere ser rico.*

1.2. Teoría de Conjuntos Ingenua (Naive Set Theory). A pesar de que existen serias formalizaciones de la teoría de conjuntos, nos contentaremos con desarrollar su álgebra usando el punto de vista inocente.