Contenido

Notas sobre Ecuaciones Diferenciales

César Bautista Ramos

Facultad de Ciencias de la Computación, BUAP

CAPíTULO 1

Idea de una ecuación diferencial

1. La importancia de las ecuaciones diferenciales en diferentes disciplinas

Una *ecuación diferencial* es una igualdad que involucra una función incógnita (por despejar) y sus derivadas.

Las ecuaciones diferenciales aparecen como módelos matemáticos de la naturaleza, particularmente en quellos sistemas naturales dinámicos ó cambiantes. Por ejemplo, según la Física Clásica, el mundo macroscópico está regido por las leyes de Newton. La segunda de éstas es una ecuación diferencial:

Ejemplo 1 (Mecánica clásica). Sea $u(t)$ la posición de una partícula sobre la que actúan una fuerza F que es una función del tiempo, de la posición $u(t)$ y de la velocidad $du(t)/dt$. Entonces, la segunda ley de Newton asegura que,

$$m\,\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F(t, u(t), \frac{du(t)}{dt})$$

de tal ecuacion queremos encontrar $u(t) = ?$. Se puede hacer, si se ponen condiciones a F. Si F es la fuerza de gravedad entonces $F = -mg$, donde g es una constante conocida como *constante de gravedad*. En tal caso obtenemos

$$m\,\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -mg$$

de donde

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -g$$

de aquí podemos despejar si recordamos que, según el teorema fundamental del cálculo, la integración es la operación inversa de la derivación:

$$\int \frac{d^2u(t)}{dt^2}\,dt = -\int g\,dt = -g\int dt = -gt + c_1$$

aquí c_1 es contante de integración. Esto es

$$\frac{du(t)}{dt} = -gt + c_1$$

Volviendo a integrar

$$u(t) = \int (-gt + c_1)\,dt = -g\,\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

de nuevo aquí c_2 es una nueva constante de integración.

También, según la Física, el mundo microscópico está regido según una ecuación diferencial;

Ejemplo 2 (Mecánica cuántica). La evolución de un sistema cuántico cerrado está descrita por

$$i\hbar \frac{d\phi(t)}{dt} = H\phi(t)$$

donde $\hbar$ es una constante llamada *constante de Planck*, i es el número complejo tal que $i^2 = -1$ y H es el hamiltoniano del sistema.

Después veremos que las soluciones de tal ecuación (llamada *ecuación de Heisenberg*, están descrita por funciones exponenciales.

Definición 3. *Si en una ecuación diferencial, la función incógnita depende de una sola variable, la ecuación se llama* **ecuación diferencial ordinaria**.

Si la función incógnita depende de más de una variable entonces la ecuación se llama **ecuaciones diferencial parcial**.

Ejemplo 4. Sea $R(t)$ la cantidad presente de cierta sustancia radiactiva (radio) al tiempo t. Ésta cantidad decae en función del tiempo siguiendo la relación

$$\frac{dR(t)}{dt} = -KR(t).$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria.

Ejemplo 5. Sea $u(x, y)$ la temperatura de una placa en el punto (x, y). Bajo ciertas condiciones de homogeneidad, tal temperatura satisface

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

esta es una ecuación diferencial parcial que se llama *la ecuación del calor*.

2. Las ecuaciones diferenciales como problema matemático

Definición 6. *El* **orden** *de una ecuación diferencial es igual al orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.*

Ejemplo 7. La ecuacion diferencial

$$L\,\frac{d^2Q(t)}{dt} + R\,\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,Q(t) = E(t)$$

es una ecuación diferencial de orden 2.

Ejemplo 8. La ecuación

$$m\,\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -gm$$

es una ecuación diferencial de orden 2.

Ejemplo 9. La ecuación

$$\frac{dR(t)}{dt} = -KR(t)$$

es una ecuación diferencial de orden 1.

Frecuentemente escribiremos $u^{(1)}(t)$ en lugar de $du(t)/dt$, $u^{(2)}(t)$ en lugar de $d^2u(t)/dt^2$. Esto es:

$$\begin{aligned} u^{(0)}(t) &= u(t) \\ u^{(1)}(t) &= \frac{du(t)}{dt} \\ u^{(2)}(t) &= \frac{d^2u(t)}{dt^2} \\ &\vdots \\ u^{(n)}(t) &= \frac{d^nu(t)}{dt^n} \end{aligned}$$

Otra notación común para las derivadas es

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{du(t)}{dt} \\ u''(t) &= \frac{d^2u(t)}{dt^2} \\ u'''(t) &= \frac{d^3u(t)}{dt^3} \end{aligned}$$

Hemos utilizado variable t en la función u. También se puede usar otra variable, por ejemplo x que es lo que haremos enseguida.

Definición 10. *Una ecuación diferencial de* **orden** n *es una ecuación del tipo*

$$F(x, u(x), u^{(1)}(x), \ldots, u^{(n)}(x)) = 0 \tag{1}$$

donde F *es una fnción de* $n+1$ *variables.*

Si en lugar de escribir $u(x)$ escribimos y ($y = u(x)$), la ecuacion (1) queda como

$$F(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

Por ejemplo, la ecuación

$$-x^4 + yy' + 2e^x y'' + y''' = 0$$

es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden equivalente a

$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4$$

o bien a

$$y''' = -2e^x y'' - yy' + x^4.$$

Generalmente, para resolver una ecuación diferencial será conveniente despejar el término que le da el orden a la ecuación. Aunque a veces no se puede despejar de manera única. Por ejemplo,

$$y'^2 + xy' + 4y = 0$$

conduce a

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 - 16y^2}}{2} \vee y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 - 6y}}{2}$$

otras veces puede resular prácticamente imposible despejar el término de mayor orden, por ejemplo:

$$sin(y') + xe^{y'} + 4y = 0$$

sin embargo , en lo que sigue, *siempre se estudiarán ecuaciones diferenciales en los que es posible despejar* $y^{(n)}$ para obtener

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) \ . \tag{3}$$

2.1. Soluciones.

DEFINICIÓN 11. *Por* **solución de una ecuación diferencial** *de la forma* (3) *en un intervalo* (α, β) *se entiende una función* ϕ *tal que existen* $\phi', \phi'', \dots, \phi^{(n)}$ *en* (α, β) *y tales que cumplen*

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)), \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

EJEMPLO 12. La ecuación diferencial

$$\frac{dR}{dx} = -KR$$

tiene como una solución a $R = phi(x) = ce^{-Kx}$, con $c \in (-\infty, \infty)$ donde c es una cosntante, pues

$$\phi'(x) = c(-K)e^{-Kx} = -K\phi(x), \quad \forall x \in (-\infty, \infty).$$

EJEMPLO 13. La ecución

$$y'' + y = 0$$

tiene como una solución a $y_1 = y_1(x) = \cos(x)$ pues

$$\begin{aligned} \cos''(x) + \cos(x) &= (-\sin(x))' + \cos(x) \\ &= -\cos(x) + \cos(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para cualquier $x \in (-\infty, \infty)$ y también $y_2 = y_2(x) = \sin(x)$ pues

$$\begin{aligned} \sin''(x) + \sin(x) &= \cos'(x) + \sin(x) \\ &= -\sin(x) + \sin(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

para todo $x \in (-\infty, \infty)$.

TAREA 1. *Para cada una de las siguientes ecuaciones verifique si las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial:*

(1) $y'' - y = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
(2) $y''' + 2y' - 3y = 0$; $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^x$
(3) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = x$; $y_1 = x/3$, $y_2 = e^{-x} + x/3$
(4) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, $x > 0$; $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = 1/x$.
(5) $y'' + y = \sec(x)$, $0 < x < \pi/2$; $y = \cos(x)\log(x) + x\sin(x)$.
(6) $y' - 2xy = 1$; $y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}$.

EJEMPLO 14.

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad x > 0$$

tiene como una solución

$$y = x^2 \log(x), \quad \forall x > 0,$$

pues

$$\begin{aligned} x^2y'' &= x^2\left(2x\log(x) + \frac{x^2}{x}\right)' \\ &= x^2(2\log(x) + \frac{2x}{x} + 1) \\ &= 2x^2\log(x) + 3x^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 3xy' &= 3x(2x\log(x) + x) \\ &= 6x^2\log(x) + 3x^2 \end{aligned}$$

de donde

$$x^2y'' - 3xy' = -4x^2\log(x) = -4y$$

es decir

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad \forall x > 0.$$

Éste ejemplo puede resolverse en *Maxima*: primero las derivadas se declaran usando la instrucción `diff`. Así, la derivada $dy(x)/dx$ corresponde a

Maxima

```
diff(y(x),x);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y\,(x)$$

Mientras que $y^{(n)}(x)$ corresponde a

Maxima

```
diff(y,x,n);
```

$$\frac{d^n}{d\,x^n}\,y$$

Primero asignamos a la variable y la solución de la ecuación diferencial que se propone:

Maxima

```
y:x^2*log(x);
```

$$x^2\ \log x$$

y ahora sustituimos en la ecuación diferencial y asignamos el resultado en la variable `res`:

Maxima

```
res:x^2*diff(y,x,2)-3*x*diff(y,x)+4*y;
```

$$-3\,x\ (2\,x\ \log x+x)+x^2\ (2\ \log x+3)+4\,x^2\ \log x$$

y ahora simplificamos el resultado;

Maxima

```
expand(res);
```

$$0$$

Los dos pasos anteriores se pudieron ejecutar en una sola línea:

Maxima

```
expand(x^2*diff(y,x,2)-3*x*diff(y,x)+4*y);
```

$$0$$

Definición 15. *Una ecuación diferencial se dice* **lineal** *si tiene la forma*

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=g(x)$$

Ejemplo 16. La ecuación

$$mu^{(2)}(t) = -mg$$

es lineal.

Ejemplo 17. La ecuación

$$R'(t) = -KR(t)$$

donde K es una constante, es lineal.

Ejemplo 18. La ecuación

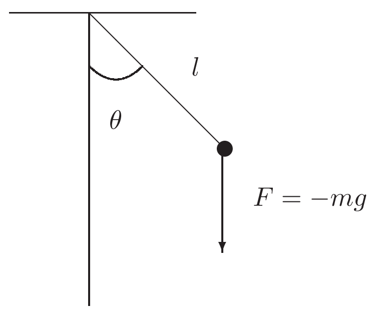
$$y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4$$

no es lineal, pues el coeficiente de y' es y.

Ejemplo 19. La ecuación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

tampoco es lineal (la incógnita es $\theta = \theta(t)$). Esta ecuación diferencial se conoce como *la ecuación de un péndulo oscilante de longitud l*.



Ejemplo 20. En la ecuación diferencial del péndulo oscilante, si el ángulo de oscilación θ es pequeño, $\theta \approx 0$ entonces $\sin\theta \approx \theta$ y entonces podemos poner

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\theta = 0$$

y ésta es es una ecuación diferencial lineal.

CAPíTULO 2

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

1. Concepto y definiciones básicas

Una ecuaciń diferencial de primer orden tiene la forma

$$y' = f(x, y).$$

Buscamos métodos de solución de tal ecuación diferencial. Comenzamos haciendo suposiciones sobre la forma de tal ecuación, para resolver primero las ecuaciones más simples.

1.1. Caso $f(x, y) = f(x)$. En este caso debemos resolver la ecuación

$$y' = f(x)$$

esto es, buscamos una función $y = \phi(x)$ tal que $\phi'(x) = f(x)$. Del curso de Cálculo Integral se sabe que tal $\phi(x)$ se obtiene como una integral:

$$y = \phi(x) = \int f(x)\, dx = \underbrace{\int_{\alpha}^{x} f(t)}_{\text{antiderivada de } f\, dt} + c$$

donde c es una constante arbitraria llamada *constante de integración*.

Ejemplo 21. Si

$$y' = \sin(2x)$$

entonces

$$y = \int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

donde c es una constante arbitraria.

1.2. Caso $f(x, y) = g(x) - p(x)\, y$. Se trata de resolver la ecuación

$$y' = g(x) - p(x)\, y$$

ó equivalentemente

$$y' + p(x)\, y = g(x)$$

donde $p(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un intervalo de la forma (α, β). Puede notarse que tal ecuación es del tipo lineal de primer orden.Para convencer al lector de que la función exponencial e^x no es extraña la a las soluciones de ecuaciones diferenciales (al contrario, aparece frecuentemente) examinaremos el siguiente subcaso.

1.2.1. *Subcaso:* $y' + ay = 0$. Tratamos de resolver $y' = -ay$. Tal tiene evidentemente soluciones

$$y = ce^{-ax}$$

donde c es una constante arbitraria. El lector debe notar lo frecuente que aparecen, en las soluciones de las ecuaciones diferenciales, las funciones exponenciales.

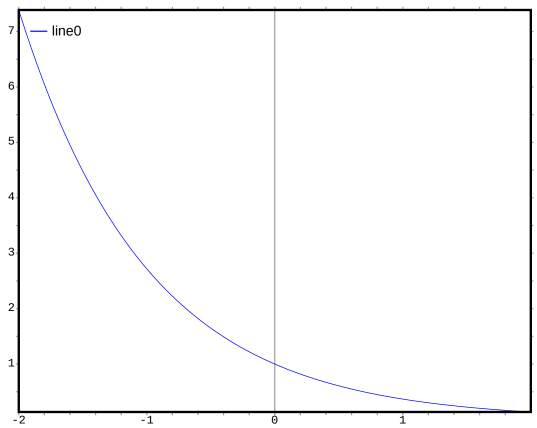
Gráfiquemos la solución $y = e^{-ax}$ con $a > 0$: ponemos una tabla,

x	$-\infty$	$+$	∞
y	∞	$\searrow$	0
y'	$-\infty$	$-$	0

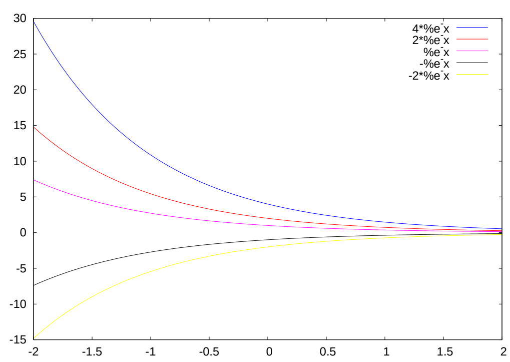
Tal tabla fué llenada con ayuda de los siguientes hechos: nótese que $y' = -ae^{-ax}$. De donde $y' < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Además

$$\lim_{x\to\infty} e^{-ax} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{ax}} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-ax} = \lim_{z\to-\infty} e^{az} = \infty$$

lo que sugiere la gráfica:



Las soluciones $y = ce^{-ax}$ con $c = 4, 2, 1, -1$ y $c = -2$ tienen gráficas siguientes:



Esta familia de soluciones se llama *curvas integrales*. Para que la ecuación original tenga una solución única hay que especificar un punto (x_0, y_0) donde pase la curva integral. Es decir, hay que especificar los datos

$$\phi(x_0) = y_0$$

ó bien, en otra notación

$$y(x_0) = y_0$$

ésta condición se llama *valores iniciales*. Por ejemplo, resolvamos

$$y' + ay = 0$$

con condición inicial

$$y(0) = 2.$$

Sabemos que la ecuación diferencial tiene soluciones $y = ce^{-ax}$ y queremos que

$$2 = y(0) = c^{-a0} = c$$

es decir, la solución única es

$$\boxed{y = 2e^{-ax}.}$$

1.3. Caso $y' + ay = g(x)$. . Si $a = 0$ sabemos que

$$y = \int g(x)\,dx = \int_\alpha^x g(t) + c \ .$$

Mientras que si $a \neq 0$ la idea es escribir el lado izquierdo de la ecuación diferencial del caso examinado como la derivada de un producto con y. Esto es, queremos $\psi = \psi(x)$ tal que

$$y' + ay = \frac{d}{dx}(y\psi)$$

(porque en tal caso tendríamos

$$\frac{d}{dx}y\psi = g(x)$$

de donde

$$y\psi = \int g(x)\,dx$$

y entonces podemos despejar y). Obsérvese que

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{ax}\right) = \frac{dy}{dx}e^{ax} + aye^{ay} = e^{ax}\left(\frac{dy}{dx} + ay\right)$$

que es, salvo por un factor, el lado izquierdo de la ecuación que queremos resolver. Lo cual sugiere el siguiente método: dada la ecuación diferencial

$$y' + ay = g(x) \tag{4}$$

multiplicamos a ambos lados por e^{ax}:

$$\underbrace{e^{ax}\left(y' + ay\right)}_{\frac{d}{dx}(ye^{ax})} = e^{ax}f(x)$$

esto es

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{ax}\right) = g(x)e^{ax}$$

por lo que

$$ye^{ax} = \int g(x)\,e^{ax}\,dx = \int_\alpha^x g(t)e^{at}dt + c$$

por lo tanto

$$\boxed{y = \frac{1}{e^{ax}} \int_{\alpha}^{x} g(t) e^{at} dt + \frac{c}{e^{ax}}} \ .$$

EJEMPLO 22. Encontrar la solución al problema con valores iniciales

$$y' + 2y = e^{-x} \tag{5}$$
$$y(0) = 3$$

Sol. Multiplicamos a ambos lados de (5) por e^{2x}:

$$\underbrace{e^{2x}y' + 2ye^{2x}}_{\frac{d(ye^{2x})}{dx}} = e^{x}$$

lo que implica

$$ye^{2x} = \int e^{x}\, dx = e^{x} + c$$
$$y = e^{-x} + \frac{c}{e^{2x}}$$

Consideramso ahora la condición inicial

$$3 = y(0) = 1 + \frac{c}{1}$$

de donde $c = 2$. Por lo tanto,

$$\boxed{y = e^{-x} + \frac{2}{e^{2x}}}$$

1.4. Caso: $y' + p(x)y = g(x)$. Por analogía con el caso anterior hay que escoger $\mu(x)$ (llamado *factor integrante*) tal que

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right) = \mu(x)\left(y' + p(x)y\right) \tag{6}$$

Pero el lado derecho de (6) es

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y$$

mientras que el lado izquierdo es

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)y\right) = \mu'(x) + \mu(x)y'$$

esto es

$$\mu'(x) + \mu(x)y' = \mu(x)y' + \mu(x)p(x)y$$

de donde

$$\mu'(x)y = \mu(x)p(x)y$$

lo que implica, si elegimos $\mu(x) \neq 0$,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x)$$

y si $\mu(x) > 0$, ésta ecuación es equivalente a

$$\left(\ln(\,\mu(x)\,)\right)' = p(x)$$
$$\ln \mu(x) = \int p(x)\, dx$$
$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

Eligiendo tal $\mu(x)$ tenemos que

$$(\,\mu(x)y\,)' = g(x)$$

$$\mu(x)y = \int g(x)\,dx$$

de donde

$$\boxed{y = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}} \int g(x)\,dx}$$

Ejemplo 23. Encontrar la solución al problema con valores iniciales

$$y' - 2xy = x, \quad y(0) = 1 \ .$$

Sol. El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2+c_1}$$

donde c_1 es una constante arbitraria (constante de integración). Por lo que hay que multiplicar la ecuación diferencial por $e^{-x^2+c_1}$.

$$\underbrace{e^{-x^2+c_1}\,(y' - 2x)}_{(e^{-x^2+c_1}y)'} = e^{-x^2+c_1}x$$

lo que implica

$$e^{-x^2+c_1}y = \int xe^{-x^2+c_1}dx$$

i.e.,

$$e^{c_1}e^{-x^2}y = e^{c_1}\int xe^{-x^2}dx$$

podemos cancelar el factor e^{c_1} que involucra a la primera constante de integración que obtuvimos:

$$e^{-x^2}y = \int xe^{-x^2}dx$$

haciendo el cambio de variable $u = -x^2$, $du = -2x\,dx$, por lo que $-du/2 = xdx$. Luego

$$e^{-x^2}y = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}\,e^u + c_2 = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c_2$$

Como puede notarse del ejemplo anterior, en la fórmula de factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

cuando se calcula la integra indefinida en términos de una antiderivada, la constante de integración, al final, se cancela; por lo que ésta es inútil. Se aconseja no considerarla desde el principio.

Una función que también ocurre no en pocas ocasiones es la llamada *función error*.

Definición 24. *La* **función error** *es*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

Ejemplo 25. Resolver

$$y' - 2xy = 1, \quad y(0) = 1 \ .$$

Sol. El factor integrante es $\mu(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$. Multiplicamos por tal:

$$\underbrace{e^{-x^2} y' - 2xe^{-x^2} y}_{(ye^{-x^2})'} = e^{-x^2}$$

luego

$$ye^{-x^2} = \int e^{-x^2} dx \ .$$

Para calcular la integral del lado derecho de esta ecuación buscamos una antiderivada de e^{-x^2}. Según el teorema fundamental del cáculo, una de tales antiderivadas es $\int_0^x e^{-t^2} dt = (\sqrt{\pi}/2)\,\text{erf}(x)$. Por lo que

$$ye^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf}(x) + c$$

entonces

$$y = e^{x^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf}(x) + ce^{x^2}.$$

Según la condición inicial

$$1 = y(0) = e^0 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underbrace{\text{erf}(0)}_{0} + ce^0 = c$$

Por lo tanto,

$$\boxed{y = e^{x^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{erf}(x) + e^{x^2}}$$

Tarea 2.

(1) *Resolver*
   (a) $y' + 3y = x + e^{-2x}$
   (b) $y' - 2y = x^2 e^{2x}$
   (c) $y' + y = xe^{-x} + 1$
   (d) $y' + \frac{y}{x} = 3\cos(2x)$, $x > 0$
   (e) $y' - y = 2e^x$
   (f) $xy' + 2y = \sin(x)$, $x > 0$

(2) *Resolver el problema dado con valores iniciales.*
   (a) $y' - y = 2xe^{2x}$, $y(0) = 1$
   (b) $y' + 2y = xe^{-2x}$, $y(1) = 0$
   (c) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos(x)}{x^2}$, $y(\pi) = 0$, $x > 0$
   (d) $y' - 2y = e^{2x}$, $y(0) = 2$
   (e) $xy' + 2y = \sin(x)$, $y(\pi/2) = 1$

(3) *Encuentre la solución de*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}$$

(Sugerencia: considere a x como función de y).

Los métodos anteriores pueden resumirse en el enunciado y la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 1 (Existencia y unicidad). *Si* $p, q : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *son continuas y* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *entonces existe una única* $y = \phi(x)$ *tal que* y *satisface*

$$y' + p(x)y = g(x), \quad x \in (\alpha, \beta)$$

y también satisface la condición inicial

$$y(x_0) = y_0$$

DEMOSTRACIÓN. Como p es continua existe $\int_\alpha^x p(t)dt$, luego podemos poner $\mu(x) = e^{\int p(t)dt}$. Luego,

$$\underbrace{\mu(x)y' + p(x)\mu(x)y}_{(\mu(x)y)'} = \mu(x)g(x)$$

entonces

$$\mu(x)\, y = \int_\alpha^x \mu(t)g(t)\, dt + c$$

de donde

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int_\alpha^x \mu(t)g(t)\, dt + \frac{c}{\mu(x)}$$

y de la condición inicial, c queda establecido unívocamente. □

EJEMPLO 26. Resolver

$$xy' + 2y = 4x^2, \quad y(1) = 2$$

Sol. Multiplicamos la ecuación diferencial a ambos lados por $1/x$ (como se busca solución alrededor de $x = 1$ -ver condición inicial- podemos suponer $x \neq 0$):

$$y' + \frac{2}{x}\, y = 4x$$

Ahora la ecuación diferencial tiene la forma del teorema de existencia y unicidad y podemos usar las técnicas anteriores. Multiplicamos por $\mu(x) = e^{\int (2/x)dx} = e^{2\ln(x)} = x^2$:

$$x^2 y' + 2xy = 4x^3$$
$$(x^2 y)' = 4x^3$$
$$x^2 y = \int 4x^3\, dx = x^4 + c$$

de donde

$$y = x^2 + \frac{c}{x^2}$$

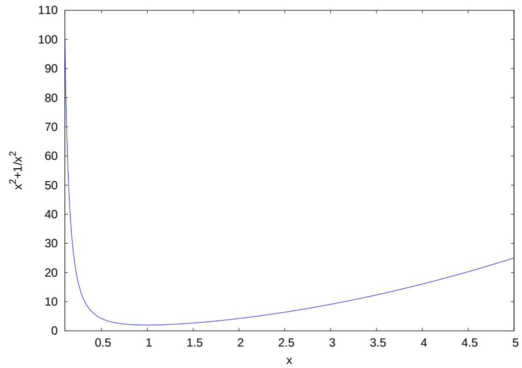
y de la condición inicial:

$$2 = y(1) = 1 + \frac{c}{1}$$

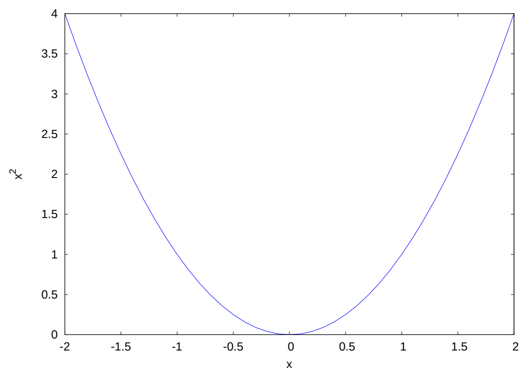
por lo que $c = 1$ y así

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad \forall x > 0.$$

En el ejemplo anterior la solución resultó $y = x^2 + 1/x^2$ en el rango $x \in (0, \infty)$. Pero si la condición inical fuera $y(1) = 1$, queda $c = 0$ y entonces la solución es $y = x^2$ con $x \in (-\infty, \infty)$. Esta diferencia, dada por las condiciones iniciales, se debe al comportamiento de las curvas integrales. La gráfica de la solución anterior $y = x^2 + 1/x^2$ es



mientras que la gráfica de $y = x^2$ es



Más generalmente, dibujemos las curvas integrales

$$y = x^2 + \frac{c}{x^2} \tag{7}$$

para $c > 0$. Entonces

$$y' = 2x - \frac{2c}{x^3}$$

por lo que

$$y' > 0 \Leftrightarrow x > \frac{c}{x^3}$$

Caso: $x > 0$:

$$x > \frac{c}{x^3} \Leftrightarrow x^4 > 4 \Leftrightarrow \underbrace{|x|}_{x} > \sqrt[4]{c}$$

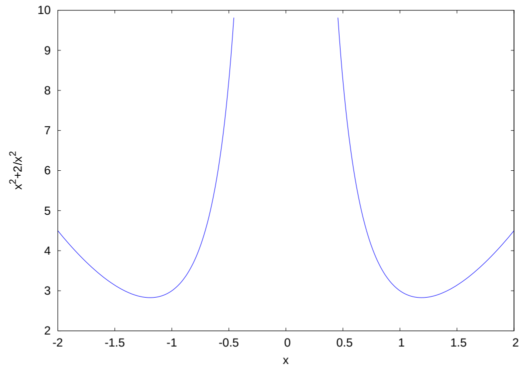
Caso: $x < 0$

$$x > \frac{c}{x^3} \Leftrightarrow x^4 < c \Leftrightarrow \underbrace{|x|}_{-x} < \sqrt[4]{c} \Leftrightarrow x > -\sqrt[4]{c}$$

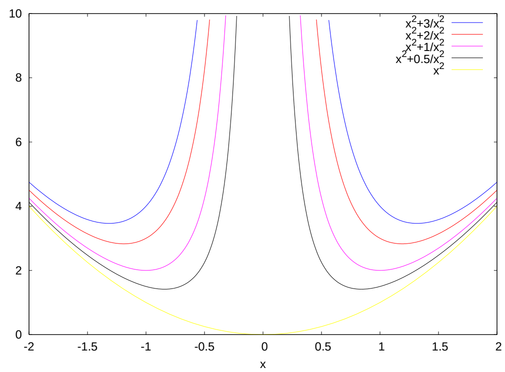
Es decir la funcion y es creciente $(y' > 0)$ sólamente en los intervalos $(-\sqrt[4]{c}, 0)$ y $(\sqrt[4]{c}, \infty)$. Resumimos esta información en la tabla:

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{c}$		0		$\sqrt[4]{c}$		∞
y'	$-\infty$	-		$+$		-		$+$	∞
y	∞	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	∞

lo cual sugiere las siguientes gráficas



Para varios valores de c:



Ahora para $c < 0$: tenemos que

$$y' > 0 \Leftrightarrow x > \frac{c}{x^3}$$

Caso $x > 0$:

$$x > \frac{c}{x^3} \Leftrightarrow x^4 > c \text{ lo cual es cierto siempre } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Caso $x < 0$:

$$x > \frac{c}{x^3} \Leftrightarrow x^4 < c \text{ imposible.}$$

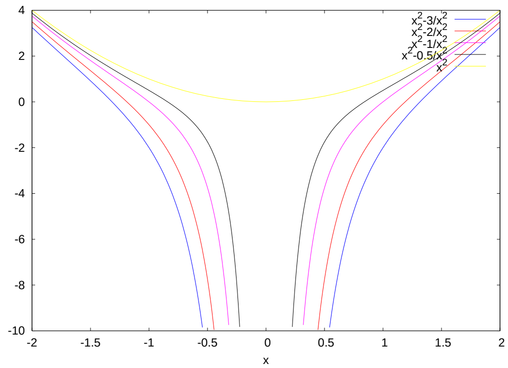
Notemos que

$$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^-}\left(x^2 + \frac{c}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{c}{x^2} = -\infty.$$

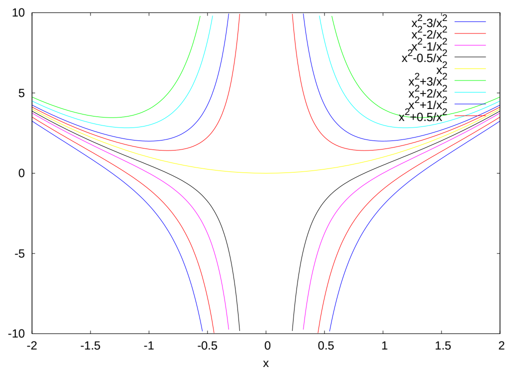
Resumimos tal información en la tabla

x	$-\infty$			0			∞
y'	∞	$-$	$-\infty$		$-\infty$	$+$	∞
y	∞	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	∞

lo cual sugiere las gráficas



En resumen, las curvas integrales se ven como



TAREA 3.

(1) *Encuentre la solución general de*
   (a) $y' + (1/x)y = \sin(x)$, $x > 0$
   (b) $x^2y' + 3xy = (\sin(x))/x$, $x < 0$
   (c) $y' + \tan(x)y = xsin(x)$, $-\pi/2 < x < \pi/2$
   (d) $xy' + 2y = e^x$, $x > 0$

(2) *Resolver y encontrar el intervalo donde es válida la solución.*
   (a) $xy' + 2y = x^2 - x + 1$, $y(1) = 1/2$
   (b) $xy' + y = e^x$, $y(1) = 1$
   (c) $y' + \cot(x)y = 2\csc(x)$, $y(\pi/2) = 1$
   (d) $xy' + 2y = \sin(x)$, $y(\pi) = 1/\pi$

2. Ecuaciones diferenciales no lineales

La teoría de las ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales se basa en el siguiente teorema.

TEOREMA 2 (Existencia y unicidad). *Sean $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ función de dos variables tal que f es continua y existe $\partial f/\partial y$ también función continua en $(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$. Supóngase que $\alpha < x_0 < \beta$ y $\gamma < y_0 < \delta$, entonces existe una solución única $y = \phi(x)$ del problema*

$$y' = f(x, y)$$

con valor inicial

$$y(x_0) = y_0.$$

Cuando se tienen ecuaciones diferenciales no lineales, a menudo la solución resulta no explícita, sino implícita. Por ejemplo, la eucción diferencial no lineal

$$y' = -\frac{x}{y}$$

tiene solución y tal que

$$x^2 + y^2 = k$$

pues

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dk}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) \\ &= 2x + 2y\,y' \end{aligned}$$

lo que implica que

$$-\frac{x}{y} = y'.$$

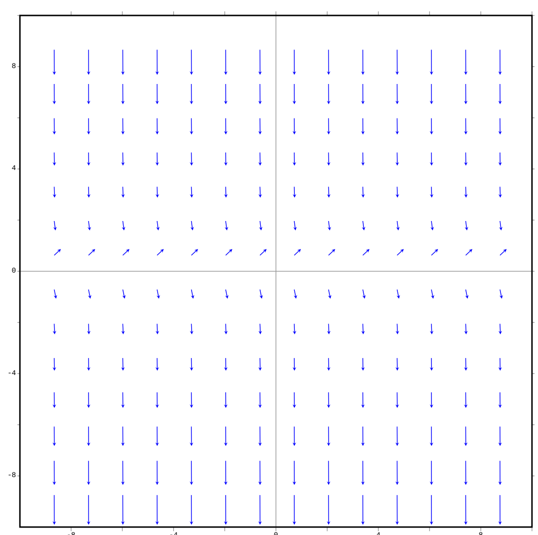
Por otro lado, de una ecuación diferencial de primer orden no lineal se pueden dibujar sus curvas integrales sin conocer directamente éstas. Por ejemplo, la ecuación

$$y' = 4y(1-y)$$

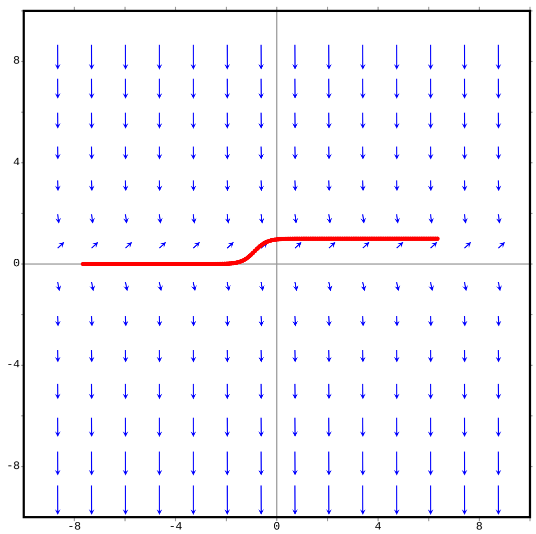
es una relación entre las alturas y y la pendiente de la curva integral. Esto es, si $y = 1/4$ en tal ecuación resulta $y' = 3/4$ que es la pendiente de la curva integral; a altura $y = 1$ las curvas integrales tienen pendiente $y = 0$ esto es paralelas al eje x, etc. Ponemos tal información en una tabla

y	$1/4$	$1/3$	$1/2$	1
y'	$3/4$	$8/9$	1	0

y dibujamos tales pendientes a diferentes alturas, dando como resultado:



que se llama *campo direccional*. Y por ejemplo una curva integral tiene que seguir tales pendientes como se ve en:



Podemos usar *Maxima* para visualizar el campo de direcciones. Tenemos que cargar primero el paquete `plotdf`. Entonces si queremos dibujar el campo de direcciones de la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

la instrucción en *Maxima* es `plotdf(`$f(x,y)$`)`.

Ejemplo 27. Dibujar el campo de direcciones de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x-y}{2x+5y} \quad .$$

Sol. Usamos *Maxima*. Primero cargamos el paquete `plotdf`:

Maxima * Inicio*

```
load(plotdf);
```

```
/usr/local/share/maxima/5.12.0/share/dynamics/plotdf.lisp
```

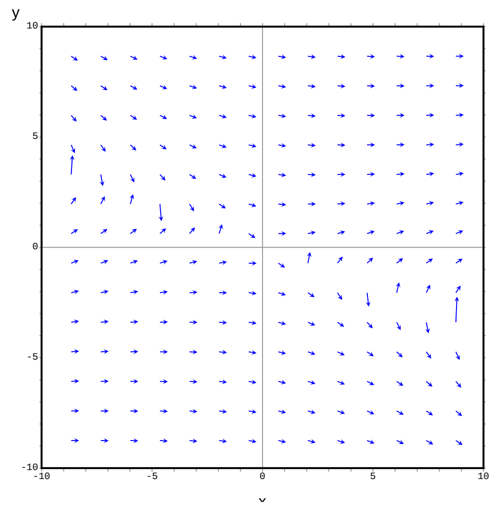
enseguida escribimos el lado derecho de la ecuación diferencial como argumento de la función `plotdf`.

Maxima

```
plotdf((x-y)/(2*x+5*y));
```

$$0$$

que resulta en



EJEMPLO 28. En la ecuación diferencial (no lineal)

$$y' = \frac{x-y}{2x+5y}$$

establecer una región del plano xy donde pueda garantizarse la existencia de una solución única, según el teorema de existencia y unicidad.

Sol. Tenemos que

$$f(x,y) = \frac{x-y}{2\,x+5\,y}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\,f(x,y) = -\frac{7\,x}{(5\,y+2\,x)^2}$$

las cuales son continuas excepto cuando el denominador se anula, .i.e., son continuas si $(5y+5x)^2 \neq 0$; lo cual ocurre si $x \in (0,\infty)$ y $y \in (0,\infty)$. Por lo que, una región donde existe solución única es en el rectángulo $(0,\infty)\times(0,\infty)$.

TAREA 4.

(1) *Para cada una de las ecuaciones diferenciales, establezca una región del plano xy, donde la existencia de una solción única, a través de cualquier punto especificado, pueda garantizarse por medio del teorema fundamental de existencia y unicidad.*

(a)

$$y' = \frac{x-y}{2x+5y}$$

(b)

$$y' = (1-x^2-y^2)^{1/2}$$

(c)

$$y' = \frac{2xy}{1+y^2}$$

(d)

$$y' = 3(x+y)^{-2}$$

(e)

$$y' = (x^2 + y^2)^{3/2}$$

(2) *Demuestre que* $y = (1 - x^2)^{-1}$ *es solución al problema*

$$y' = 2xy^2, \quad y(0) = 1.$$

¿En qué intervalo es válida esta solución?

(3) *Bosqueje el campo direccional*

(a) $y' = x^2 + y^2$
(b) $y' = x^2 - xy - y^2 - 1$
(c) $y' = \frac{xy}{1+y^2}$
(d) $y' = \frac{2x-3y}{x+y}$

3. Ecuaciones separables

DEFINICIÓN 29. *Si una ecuación diferencial*

$$y' = f(x, y)$$

se puede poner de la forma

$$M(x)\, dx = N(y)\, dy \tag{8}$$

entonces la ecuación se dice **separable**.

Debemos hacer notar que la ecuación (8) es una expresión simbólica de la ecuación

$$M(x) = N(y)\, \frac{dy}{dx} \ .$$

Resulta que es más cómoda la expresión (8) por el método de solución de las ecuaciones separables que expondremos enseguida.

3.1. Método de solución de las ecuaciones separables. Tenemos que resolver la ecuación

$$M(x)\, dx = N(y)\, dy$$

esto es

$$M(x) - N(y)\, \frac{dy}{dx} = 0 \ . \tag{9}$$

Ponemos

$$H_1(x) = \int M(x)\, dx, \quad H_2(y) = \int N(y)\, dy$$

luego

$$H_1'(x) = M(x), \quad H_2'(y) = N(y).$$

Sustituyendo en (9) tenemos que

$$H_1'(x) - H_2'(y)\, \frac{dy}{dx} = 0$$

pero si $y = \phi(x)$ es solución de (9), entonces se puede poner

$$H_1'(x) + \big(H_2(\phi(x)) \big)' = 0$$

lo que es equivalente a

$$\big(H_1(x) + H_2(\phi(x))\big)' = 0$$

lo que implica que la expresión dentro del paréntesis es una constante:

$$H_1(x) + H_2(\phi(x)) = c \tag{10}$$

donde c es una constante arbitraria. Se dice entonces que la ecuación diferencial (9) tiene solución implícita dada por (10)

Ejemplo 30. Resolver el problema con valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1 \ .$$

Sol. Tenemos que la ecuación diferencial se puede poner como

$$2(y-1)\,dy = (3x^2+4x+2)\,dx$$

entonces integramos a ambos lados de la ecuación

$$\int 2(y-1)\,dy = \int (3x^2+4x+2)\,dx$$

y obtenemos

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c \tag{11}$$

pero según la condición inicial $y(0) = -1$; esto es si ponemos $x = 0$ entonces $y = -1$. Substituimos estas relaciones en la ecuación (11):

$$(-1)^2 - 2(-1) = (0)^3 + 2(0)^2 + 2(0) + c$$

de donde $c = 3$. Tenemos entonces la solución y dada ímplicitamente por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 3$$

o bien

$$y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 3) = 0$$

que es una ecuación cuadrática con incógnita y; podemos usar la bien conocida fórmula general para resolver en y:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(x^3 + 2x^2 + 2x + 3)}}{2} = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}\ . \tag{12}$$

Según el teorema de existencia y unicidad, debería haber una sola solución, pero por la aparición de $\pm$ parece que tenemos dos; esto no es así, sólo hay una solución válida, lo cual se hace evidente si consideremos de nuevo la condición inicial en la fórmula (12):

$$-1 = y(0) = 1 \pm 2$$

de donde hay que escoger $-$: la solución es

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

En las ecuaciones separables resultan frecuentemente soluciones no dadas de forma explícita, sino implícita. En el ejemplo anterior de la ecuaci'on implícita pudimos despejar y obtener la fórmula explícita. En general nos conformaremos con obtener la solución de forma implícita.

Ejemplo 31. Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,\cos(x)}{1+2y^2}, \quad y(0) = 1 \ .$$

Sol. Tenemos que la ecuación es separable, pues se puede escribir como

$$\frac{1+2y^2}{y}\,dy = \cos(x)\,dx$$

entonces

$$\int \left(\frac{1}{y} + 2y\right) dy = \int \cos(x)\, dx$$

$$\ln|y| + y^2 = \sin(x) + c$$

Según la condición inicial, si $x = 0$ entonces $y = 1$. Sustituyendo queda

$$0 + 1 = 0 + c$$

de donde $c = 1$. Por lo tanto la solución queda dada implícitamente por

$$\ln|y| + y^2 = \sin(x) + 1$$

Podemos averiguar más sobre la solución y. Tal solución tiene que ser derivable, en particular tiene que ser continua, luego como $y(0) = 1$ entonces $y > 0$ en todo un intervalo sobre x:

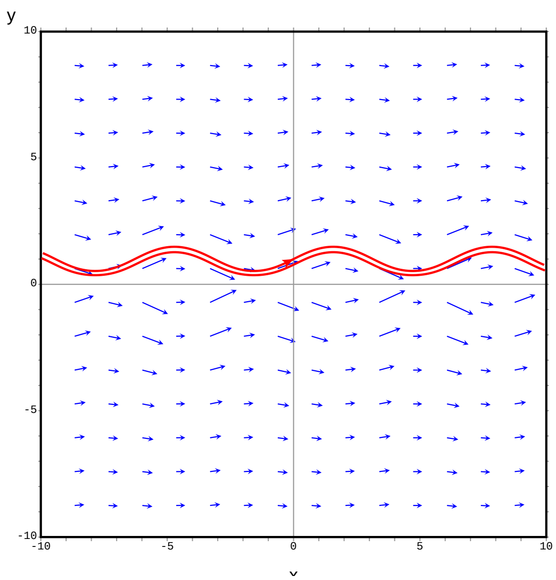


FIGURA 1. La solución debe de pasar por $y = 1$ para $x = 0$; de donde $y > 0$ en todo un intervalo.

Por lo que la ecuación de la solución puede escribirse como

$$\ln(y) + y^2 = \sin(x) + 1$$

y se puede mostrar que el intervalo de la solución es $-\infty < x < \infty$.

La sesión correspondiente en *Maxima*: primero hay que cargar el paquete `contrib_ode`:

Maxima — *inicio*

```
load(contrib_ode);
```

`/Applications/Maxima.app/Contents/Resources/maxima/share/maxima/5.24.0/share/contrib/diffequa` enseguida se declara a y como variable dependiente de x:

Maxima

```
depends(y,x);
```

$$[y(x)]$$

luego se asigna la ecuación diferencial a la etiqueta ec

Maxima

```
ec:diff(y,x)=(y*cos(x))/(1+2*y^2);
```

$$ec : \frac{d}{d\,x}\,y = \frac{\cos x\,y}{2\,y^2+1}$$

Luego, la instrucción para resolver tal ecuación es contrib_ode

Maxima *Respuesta*

```
contrib_ode(ec,y,x);
```

$$\left[\frac{\log y^2 + 2\,y^2}{2} = \sin x + \%c\right]$$

Se le puede pedir a *Maxima* el método usado para resolver ésta ecuación con method

Maxima

```
method;
```

$$separable$$

Se puede simplificar un poco la expresión con expand

Maxima

```
expand(%);
```

$$\left[\frac{\log y^2}{2} + y^2 = \sin x + \%c\right]$$

Para imponer la condición inicial hacemos

Maxima

```
ev(%,[x=0,y=1]);
```

$$[1 = \%c]$$

Tarea 5.

(1) *Encuentre la solución en forma expícita y determine, al menos en forma aproximada, el intervalo para el cual está definida.*
  (a) $\sin(2x)dx + \cos(3y)dy = 0,\ y(\pi/2) = 3$
  (b) $x\,dx + y\,ye^{-x}dy = 0,\ y(0) = 1$
  (c)
$$\frac{dr}{d\theta} = r, \quad r(0) = 2$$
  (d)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y + x^2y}, \quad y(0) = -2$$
  (e)
$$\frac{dy}{dx} = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$$
  (f)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + 2y}, \quad y(2) = 0$$

(2) *Resuelva la ecuación*
$$y^2\sqrt{1 - x^2}\,dy = \arcsin(x)\,dx$$
en el intervalo $-1 < x < 1$.

(3) *Sean* a, b, c, d *constantes. Resolver*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(4) *Sean* a, b, c, d. *Resolver*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + b}{cy + d}$$

4. Ecuaciones exactas

Supóngase la ecuación

$$\psi(x,y) = c \tag{13}$$

Si $y = y(x)$ es una función dada implícitamente por (**??**), entonces

$$\psi(x, y(x)) = c$$

lo que implica

$$\frac{d}{dx}\,\psi(x, y(x)) = 0$$

usando la regla de la cadena en varias variables obtenemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \psi(x)) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x) = 0$$

lo cual indica que $y = y(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)\, y' = 0 \tag{14}$$

Por brevedad se hace la siguiente definición:

Definición 32.

$$\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Entonces la ecuación (14) se puede escribir como

$$\psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)\, y' = 0\ .$$

Recíprocamente, supóngase que se da la ecuación diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)\, y' = 0 \tag{15}$$

y que existe ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y)$$

entonces

$$0 = \psi_x(x, y) + \psi_y(x, y)\, y' = \frac{d}{dx}\,\psi(x, y(x))$$

lo que implica

$$\psi(x, y(x)) = c$$

donde c es una constante. En tal caso la ecuación (15) se llama *exacta* cuya solución está dada por $\psi(x, y) = c$.

Definición 33. *La ecuación* (15) *se escribe simbólicamente como*

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{16}$$

Ejemplo 34. Resolver

$$2xy^3\, dx + 3x^2y^2\, dy = 0$$

Sol. Hay que notar que el lado izquierdo de la ecuación diferencial es la derivada de un producto:

$$\frac{d(x^2y^3)}{dx} = 2xy^3 + 3x^2y^2\,\frac{dy}{dx}$$

por lo que

$$\frac{d(x^2y^3)}{dx} = 0$$

de donde, existe una constante c tal que

$$x^2y^3 = c$$

lo que implica

$$y = \sqrt[3]{c}y^{-2/3}.$$

El ejemplo anterior carece realmente de un método de solución: el verificar exactitud. Sin embargo existe tal método:

TEOREMA 3. *Sean $M, N.M_y, N_x$ funciones con dos variables x, y continuas para $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Entonces la ecuación*

$$M(x, y) + N(x, y)\, y' = 0$$

es exacta en el rectǵulo $R = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ si y sólo si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y), \quad \forall (x, y) \in R \ .$$

Es decir, existe $\psi = \psi(x, y)$ tal que

$$\psi_x(x, y) = M(x, y) \text{ y } \psi_y(x, y) = N(x, y)$$

si y sólo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \ .$$

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Tenemos que

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}}_{\text{continua}} = \psi_{yx} \text{ y } \underbrace{\frac{\partial N}{\partial x}}_{\text{continua}} = \psi_{xy}$$

esto es, las derivadas parciales mixtas ψ_{yx} y ψ_{xy} son continuas, lo que implica la igualdad de éstas:

$$\underbrace{\psi_{yx}}_{M_y} = \underbrace{\psi_{xy}}_{N_x}$$

(($\Leftarrow$)) Teenmos que encontrar una función $\psi = \psi(x, y)$ tal que

$$\psi_x = M, \quad \psi_y = N.$$

En vista de que el integrando es continuo, podemos definir

$$\psi(x, y) = \int_{\alpha}^{x} M(t, y)\, dt + h(y)$$

donde $h(y)$ es constante (de integración) con respecto de y que aún no hemos definido: tenmos que hacerlo. Del teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial x}\, \psi(x, y) = M(x, y).$$

Resta por demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y) = N(x, y).$$

Se tiene que cumplir

$$\begin{aligned} N = \psi_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^x M(t,y)\,dt + h'(y) \\ &= \int_\alpha^x \frac{\partial}{\partial y} M(t,y)\,dt + h'(y) \end{aligned}$$

de donde

$$h'(y) = N(x,y) - \int_\alpha^x M_y(t,y)dt$$

Para que ésta ecuación tenga sentido, su lado derecho tiene que depender sólo de y. Chequemos que ésto es así. Para esto usaremos la derivada parcial $\partial/\partial x$: si al derivar con respecto a x nos da cero, esto indica que se tiene una constante que no depende de x. De nuevo, por el teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \int_\alpha^x M_y(x,y)dt\right) = N_x(x,y) - M_y(x,y) = 0$$

por hipótesis. Por lo que, se puede definir

$$h(y) = \int \left(N(x,y) - \int_\alpha^x M_y(x,y)dt\right)\,dy$$

y entonces el ψ buscado es

$$\psi(x,y) = \int_\alpha^x M(t,y)dt + \int\left(N(x,y) - \int_\alpha^x M_y(x,y)dt\right)\,dy$$

y tal cumple $\partial/\partial y\psi = N$.

$\square$

Ejemplo 35. Resolver

$$(y\cos(x) + 2xe^y) + (\sin(x) + x^2e^y + 2)y' = 0$$

Sol. Tenemos que esta ecuación se puede poner de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

donde $M(x,y) = y\cos(x) + 2xe^y$ y $N(x,y) = \sin(y) + x^2e^y + 2$. Luego

$$M_y = \cos(x) + 2xe^y$$

y

$$N_x = \cos(x) + 2xe^y$$

como puede notarse $M_y = N_x$ de donde la ecuación diferencial es exacta. Por lo que debe de existir $\psi(x,y)$ tal que

$$\psi_x = \underbrace{M}_{y\cos(x)+2xe^y} \quad , \quad \psi_y = \underbrace{N}_{\sin(x)+x^2e^y+2}$$

en particular

$$\begin{aligned} \psi &= \int (y\cos(x) + 2x)\,dx \\ &= y\sin(x) + x^2e^y + h(y) \end{aligned}$$

pero

$$\sin(x) + x^2e^y + 2 = \psi_y = \sin(x) + x^2e^y + h'(y)$$

lo que implica $h'(y) = 2$, por lo que $h(y) = 2y + K$, para alguna constante K.

Por lo tanto
$$\psi = y\sin(x) + x^2 e^y + 2y + K$$
y la solución y está implícita en
$$y\sin(x) + x^2 e^y + 2y = c$$
para alguna constante c.

Tarea 6.

(1) *Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. En caso afirmativo resuélvala.*
 (a) $(2x+3) + (2y-2)y' = 0$
 (b) $(2x+4y) + (2x-2y)y' = 0$
 (c) $(9x^2+y+1) - (4y-x)y' = 0$
 (d) $(2xy^2+2y) + (2x^2y+2x)y' = 0$
 (e)
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by}{bx+cy}$$
 (f) $(e^x\sin(y) - 2y\sin(x))dx + (e^x\cos(y) + 2\cos(x))dy = 0$
 (g) $(e^x\sin(y) + 3y)dx - (3x - e^x\sin(y))dy = 0$

(2) *Encuentre el valor de b para el cual las siguientes ecuaciones son exactas y para ese valor resuelva.*
 (a) $(xy^2 + bx^2y)dx + (x+y)x^2dy = 0$
 (b) $(ye^{2xy} + x)dx + (bxe^{2xy})dy = 0$

No todas las ecuaciones diferenciales son exactas. Por ejemplo
$$(y^2+3xy)\,dx + (x^2+xy)\,dy = 0$$
no es exacta, pues
$$M(x,y) = y^2+3xy, \quad N(x,y) = x^2+xy$$
$$M_y = 2y+3x \neq N_x(x,y) = 2x+y$$
En tal caso se busca un *factor integrante* $\mu(x,y)$ tal que al multiplicarlo por ambos lados de la ecuación diferencial se obtenga una ecuación diferencial exacta. En general, si
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$
se busca $\mu = \mu(x,y)$ tal que
$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$$
sea exacta, es decir, tal que
$$(\mu M)_y = (\mu N)_y. \tag{17}$$
Entonces la solución queda dada de forma implícita,
$$\psi(x,y) = c$$
El mejor de los casos es cuando μ depende de sólo una variable: $\mu = \mu(x)$ ó $\mu = \mu(y)$.

Caso $\mu = \mu(x)$: tenemos
$$(\mu M)_y = \mu M_y, \quad (\mu N)_x = \mu_x N + N_x\mu$$

De acuerdo con la ecuación (17) se obtiene

$$\mu M_y = N\,\frac{d\mu}{dx} + \mu N_x$$

lo que implica

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\,\mu \tag{18}$$

Si $\frac{M_y - N_x}{N}\mu$ depende sólo de x, tenemos que la ecuación (18) tiene la forma

$$\frac{d\mu}{dx} = p(x)\mu$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden, de donde se puede calcular μ.

Ejemplo 36. Resolver

$$(y^2 3xy)dx + (x^2 xy)dy = 0$$

Sol. Tal ecuación no es exacta. Buscamos un factor integrante μ. De acuerdo a la ecuación (18):

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{2y + 3x - 2x - y}{x^2 + xy}\,\mu = \frac{y + x}{x(x + y)}\,\mu = \frac{1}{x}\,\mu$$

es decir tenemos que resolver

$$\frac{d\mu}{dx} - \frac{1}{x}\mu = 0$$

para lo que necesitamos otro factor integrante dado por $e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{|x|}$. Elegimos este nuevo factor integrante como $1/x$ para obtener

$$\underbrace{\frac{1}{x}\,\frac{d\mu}{dx} - \frac{1}{x^2}\,\mu}_{(\mu\frac{1}{x})'} = 0$$

lo que implica que $\mu/x = c$ y así $\mu(x) = cx$. Se escoge $\mu(x) = x$.

Por lo tanto, la ecuación diferencial se debe de multiplicar por x. Queda:

$$(y^2 x + 3x^2 y)\,dx + (x^3 + x^2 y)\,dy = 0. \tag{19}$$

En este caso

$$M(x, y) = y^2 x + 3x^2 y, \quad M_y = 2yx + 3x^2$$
$$N(x, y) = x^3 + x^2 y, \quad N_x = 3x^2 + 2xy$$

es decir

$$M_y = N_x$$

por lo que la nueva ecuación (19) es exacta. Entonces existe $\psi(x, y)$ tal que $\psi_x = M$ y $\psi_y = N$. En particular

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \int M(x, y)\,dx \\ &= \int (y^2 x + 3x^2 y)dx \\ &= \frac{y^2 x^2}{2} + x^3 y + h(y)\end{aligned}$$

y

$$x^3 + yx^2 = N = \psi_y = yx^2 + x^3 + h'(y)$$

de donde $h'(y) = 0$, por lo que $h(y) = c$ constante. Por lo tanto

$$\psi(x, y) = \frac{y^2x^2}{2} + x^3y + c$$

y así, la solución está dada por

$$\frac{y^2x^2}{2} + x^3y = k$$

donde k es una constante.

Ejemplo 37. Encontrar un factor integrante y resolver la ecuación

$$ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0.$$

Sol. En este caso $M = y$ y $N = xy - e^{-2y}$. Luego $M_y = 1 \neq N_x = 2y$, por lo que la ecuación no es exacta. Buscamos un factor integrante $\mu = \mu(x)$. Entonces tenemos que resolver la nueva ecuación diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1 - 2y}{2xy - e^{-2y}}\,\mu$$

donde $\frac{1-2y}{2xy-e^{-2y}}$ debe depender de x. Pero

$$\frac{1 - 2y}{2xy - e^{-2y}} = \frac{1 - 2y}{2xy - e^{-2y}}$$

no depende sólo de x. Buscamos entonces un factor integrante que dependa sólo de y. En este caso debemos resolver la nueva ecuación diferencial

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\,\mu \tag{20}$$

donde $\frac{N_x - M_y}{M}$ debe depender sólo de y:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \left(1 - \frac{1}{y}\right)$$

que depende sólo de y. La ecuación (20) se convierte en

$$\frac{d\mu}{dy} + \left(\frac{1}{y} - 2\right)\mu = 0.$$

Para resolver ésta multiplicamos por

$$e^{\int\left(\frac{1}{y}-2\right)dy} = e^{ln|y|-2y} = \frac{|y|}{e^{2y}}$$

(elegimos y/e^{2y}):

$$\underbrace{\frac{y}{e^{2y}}\frac{d\mu}{dy} + \left(\frac{1}{e^{2y}} - \frac{2y}{e^{2y}}\right)\mu}_{(\frac{y}{e^{2y}}\mu)'} = 0$$

de donde podemos tomar

$$\mu = \frac{e^{2y}}{y}.$$

Multiplicamos por tal la ecuación diferencial original:

$$\underbrace{e^{2y}}_{M}\,dx + \underbrace{\left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right)}_{N}dy = 0$$

con $M_y = 2e^{2y} = N_x = 2e^{2y}$. Luego existe $\psi(x,y)$ tal que $\psi_x = M$, $\psi_y = N$. En particular

$$\psi = \int M dx = xe^{2y} + h(y)$$

lo que implica

$$2xe^{2y} + h'(y) = \psi_y = N = 2xe^{2y} - \frac{1}{y}$$

de donde

$$h'(y) = -\frac{1}{y}$$

i.e.,

$$h(y) = -\ln|y| + c$$

por lo tanto

$$\psi = xe^{2y} + \ln|y| + c.$$

Por lo tanto, la solución es

$$xe^{2y} + \ln|y| = K.$$

Tarea 7.

(1) *Muestre que las ecuaciones diferenciales dadas no son exactas, pero que pueden transformarse en exactas, multiplicándolas por el factor integrante dado. Resuelva entonces.*
   (a) $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$, $\mu(x,y) = (xy^3)^{-1}$
   (b)
$$\left(\frac{\sin(y)}{y} - 2e^{-x}\sin(x)\right)dx + \left(\frac{\cos(y) + 2e^{-x}\cos(x)}{y}\right)dy = 0, \quad \mu(x,y) = ye^x$$
   (c) $ydx + (2x - ye^y)dy = 0$, $\mu(x,y) = y$

(2) *Encontrar un factor integrante y resolver.*
   (a) $(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$
   (b) $y' = e^{2x} + y - 1$
   (c)
$$dx + \left(\frac{x}{y} - \sin(y)\right)dy = 0$$
   (d) $y\,dx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$
   (e) $e^x dx + (e^x\cot(y) + 2y\csc(y))\,dy = 0$
   (f)
$$\left(3x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

5. Ecuaciones homogéneas

Desafortunadamente,en ecuaciones diferenciales, hay dos usos para calificar una ecuación homogénea. En esta sección presentamos el primero de ellos. En el capítulo siguiente presentamos el segundo.

Definición 38. *Una ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

se dice **homogénea** *si se puede poner de la forma*

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{21}$$

Ejemplo 39. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

es homogénea porque

$$= \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

es decir

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ejemplo 40. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \ln(x) - \ln(y) + \frac{x+y}{x-y}$$

es también homogénea, porque se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = -\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1 + \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} + 1}$$

Obsérvese que si se hace $v = y/x$ en la ecuación (21), entonces

$$y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = F(v).$$

pero

$$\frac{dy}{dx} = x\,\frac{dv}{dx} + v$$

luego, la ecuación diferencial homogénea se transforma en

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v)$$

(ecuación diferencial con incógnita v), la cual es separable:

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

$$\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dv} = \frac{1}{F(v) - v}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}$$

y luego se puede aplicar el método de resolución para ecuaciones separables.

Tarea 8.

(1) *Muestre que las siguientes son ecuaciones diferenciales homogéneas y entonces encuentre la solución.*

(a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y}$$

(b) $2y\,dx - x\,dy = 0$

(c)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

(d)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

(e) $(x^2 + 3xy + y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$

CAPÍTULO 3

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden dos

TEOREMA 4. *Si las funciones p, q son continuas en un intervalo $\alpha < x < \beta$ entonces la ecuación diferencial*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tiene solución única $y = y(x)$ si se satisfacen las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

para algún $\alpha < x_0 < \beta$.

1. Coeficientes constantes

Supóngase que

$$L[y] = ay'' + by' + cy$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes. En tal caso las soluciones resultarán válidas para $x \in (-\infty, \infty)$.

Se proponen soluciones de la ecuación

$$L[y] = 0 \tag{22}$$

de la forma $y = e^{rx}$. Susutituyendo en (22) queda

$$\begin{aligned} 0 &= L[e^{rx}] \\ &= ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} \\ &= e^{rx}(ar^2 + br + c) \end{aligned}$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{23}$$

La ecuación (23) se llama *ecuación característica*. Tal tiene por soluciones

$$r_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En principio, se permiten incluso soluciones complejas, lo cual ocurre si el discriminante $b^2 - 4ac < 0$. Hay varios casos sobre tal discriminante:

1.1. Caso: $b^2 - 4ac > 0$**.** Tenemos entonces que $r_+ \neq r_-$ y en consecuencia e^{r_+x} y e^{r_-x} son dos soluciones diferentes. Aún más, son linealmente independientes, pues su wronskiano es

$$\begin{aligned} W(e^{r_+x}, e^{r_-x}) &= \begin{vmatrix} e^{r_+x} & e^{r_-} \\ r_+e^{r_+x} & r_-e^{r_-x} \end{vmatrix} \\ &= e^{r_+x}e^{r_-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_+ & r_- \end{vmatrix} \\ &= e^{r_+x+r_-x}(r_- - r_+) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general de $L[y] = 0$ es

$$y = c_1e^{r_+x} + c_2e^{r_-x}$$

para cualesquiera constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 41. Hallar la solución del problema con valores iniciales

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

Sol. Se propone $y = e^{rx}$. Luego $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial, queda

$$e^{rx}(r^2 + 5r + 6) = 0$$

lo cual ocurre únicamente cuando

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

ecuación que tiene como soluciones a

$$r_\pm = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

entonces cualquier solución tiene la forma (solución general)

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Considerando ahora las condiciones iniciales

$$2 = y(0) = c_1e^{2\cdot 0} + c_2e^{-3\cdot 0}$$
$$3 = y'(0) = -2c_1e^{-2\cdot 0} - 3c_2e^{-3\cdot 0}$$

ecuaciones que forman el sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcr} 2 & = & c_1 & + & c_2 \\ 3 & = & -2c_1 & - & 3c_2 \end{array}$$

que puede ser resuelto usando la regla de Cramer

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = -9, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = -7$$

Por tanto, la solución buscada es

$$\boxed{y = -9e^{-2x} - 7e^{-3x}}$$

También tal sistema pudo haber sido resuelto usando *Maxima*. Luego de iniciar una sesión se debe de escribir la ecuación diferencial a resolver. Pero antes hay que advertir al sistema que y va a indicar una función de x:

Maxima * Inicial *

```
depends(y,x);
```

$$[y(x)]$$

que es la forma en *Maxima* en la que se escribe la ecuación matemática $y = y(x)$. Enseguida es escribe la ecuación diferencial

Maxima

```
ecdif:diff(y,x,2)+5*diff(y,x)+6*y=0;
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y + 5\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + 6\,y = 0$$

Aquí le hemos puesta la etiqueta `ecdif` a la ecuación diferencial para luego referirnos a ella. La instrucción para resolver ecuaciones diferenciales es ode2 que es un acrónimo de *ordinary differential equation*.

Maxima

```
sol:ode2(ecdif,y,x);
```

$$y = \%\mathrm{k1}\,e^{-2\,x} + \%\mathrm{k2}\,e^{-3\,x}$$

que es la solución general de la ecuación diferencial del enunciado. Note que aquí las constantes arbitrarias se llaman K_1 y K_2. Ahora introducimos las condiciones iniciales. La instrucción para tal fin es `ic2` que es un acrónimo de *inital conditions two*:

Maxima

```
ic2(sol,x=0,y=2,diff(y,x)=3);
```

$$y = 9\,e^{-2\,x} - 7\,e^{-3\,x}$$

El símbolo % se usa para indicar al display inmediato anterior.

Ejemplo 42. Sea

$$4y'' - 8y' + 3y = 0$$

(1) Encontrar la solución general de la ecuación diferencial.
(2) Encontrar la solución del problema con valores iniciales

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/2.$$

Sol.

(1) Se propone $y = e^{rx}$. Entonces la ecuación característica es

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

cuyas raíces son

$$r_{\pm} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \end{cases}$$

por lo que la solución general es

$$y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

(2) Las condiciones iniciales son

$$2 = y(0) = c_1 + c_2$$
$$\frac{1}{2} = y'(0) = \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2$$

La regla de Cramer dice entonces que

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{vmatrix}} = \frac{5}{2}$$

por lo que

$$y = -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x} + \frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}x}.$$

La sesión correspondiente en *Maxima* es

(1)

Maxima * Initialization Cell *

```
depends(y,x);
```

$$[y(x)]$$

Maxima

```
ec:4*diff(y,x,2)-8*diff(y,x)+3*y=0;
```

$$4\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)-8\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+3\,y=0$$

Maxima

```
sol:ode2(ec,y,x);
```

$$y=\%\mathrm{k1}\,e^{\frac{3\,x}{2}}+\%\mathrm{k2}\,e^{\frac{x}{2}}$$

que es la solución general.

(2)

Maxima

```
ic2(sol,x=0,y=2,diff(y,x)=1/2);
```

$$y=\frac{5\,e^{\frac{x}{2}}}{2}-\frac{e^{\frac{3\,x}{2}}}{2}$$

1.2. Caso: $b^2-4ac=0$. Tenemos que $r_+=r_-=-b/2a$, por lo que tenemos una sola solución

$$y_1=e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Hay que proponer otra solución linealmente independiente, lo cual podemos hacer siguiendo el método de reducción de orden. Se propone

$$y=v(x)e^{r_+x},$$

y ahora hay que calcular $v=v(x)$. Calculamos

$$\begin{aligned}
y' &= v'e^{r_+x}+r_+e^{r_+x}v\\
y'' &= v''e^{r_+x}+v'r_+e^{r_+x}+r_+^2e^{r_+x}v+r_+e^{r_+x}v'\\
&= e^{r_+x}(v''+2r_+v'+r_+^2v),
\end{aligned}$$

sustituyendo en $L[y]=0$:

$$\begin{aligned} 0 &= L[ve^{r_+x}] \\ &= e^{r_+x}(av'' + 2ar_+v' + ar_+^2v + bv' + br_+v + cv) \\ &= e^{r_+x}(av'' + \underbrace{(2ar_+ + b)}_{0}v' + \underbrace{(ar_+^2 + br_+c)}_{0}v) \end{aligned}$$

pero también $2ar_+ + b = 0$ pues es equivalente a $r_+ = -b/2a$. Entonces

$$av'' = 0$$

lo cual es equivalente a $v' = c_1 \Leftrightarrow v = k_1x + k_2$ para algunas constantes k_1, k_2. Podemos elegir $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, para obtener que $v = x$. Por lo tanto, una segunda solución, linealmente independiente es

$$y_2 = xe^{-\frac{b}{2a}x}$$

EJEMPLO 43. Encontrar la solución general de

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Sol. Usando *Maxima* sería:

Maxima — * Initialization Cell *

```
depends(y,x);
```

$$[y(x)]$$

Maxima

```
ec:diff(y,x,2)+4*diff(y,x)+4*y=0;
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y + 4\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + 4\,y = 0$$

Maxima

```
ode2(ec,y,x);
```

$$y = (\%\mathrm{k2}\,x + \%\mathrm{k1})\,e^{-2\,x}$$

Comprobemos que la solución dada por *Maxima* es correcta. Se propone $y = e^{rx}$. Luego, la ecuación característica es

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

cuyas soluciones son

$$r_\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2$$

por lo que una solución es $y_1 = e^{2x}$ y otra, linealmente independiente se obtiene al multiplicar por x: $y_2 = xe^{-2x}$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$$

como anunciaba *Maxima*.

TAREA 9.

(1) *Encontrar la solución general*
  (a) $y'' + 2y - 3y = 0$
  (b) $6y'' - y' - y = 0$
  (c) $2y'' - 3y' + y = 0$
  (d) $y'' - 2y' + y = 0$
  (e) $y'' + 5y' = 0$
(2) *Resolver*
  (a) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
  (b) $y'' - y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$
  (c) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

1.3. Caso $b^2 - 4ac < 0$. Tenemos soluciones de la ecuación caresterística dadas por

$$r_\pm = \frac{b^2}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

notemos que

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2-4ac} &= \sqrt{(-1)(4ac-b^2)}\\ &= \sqrt{-1}\sqrt{4ac-b^2}\\ &= i\sqrt{4ac-b^2}\end{aligned}$$

por lo que

$$r_\pm = \frac{b^2}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Para continuar avanzando necesitamos de la *identidad de Euler*.

DEFINICIÓN 44 (Euler). *Si $\mu \in \mathbb{R}$,*

$$e^{i\mu} = \cos(\mu) + i\sin(\mu)$$

EJEMPLOS 45.

(1) $e^{i2\pi} = \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + i\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} = 1$

(2) $e^{i\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + i\underbrace{\sin(\pi)}_{0} = -1$

(3) $e^{i\pi/2} = \underbrace{\cos(\pi/2)}_{0} + i\underbrace{\sin(\pi/2)}_{1} = i$

(4) $e^{i\pi/4} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$

La función exponencial para números complejos arbitrarios se define como

Definición 46. *Si* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*

$$e^{\lambda + i\mu} = e^{\lambda} e^{i\mu}$$

La exponencial compleja cumple con muchas de las propiedades de la exponencial real.

Propiedad 1.

(1) $e^{x+y} = e^x e^y$
(2) $(e^x)^y = e^{xy}$
(3) $e^x/e^y = e^{x-y}$
(4)
$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$
(5)
$$\frac{d}{dz} e^{rz} = re^{rz}$$

Además, se tienen propiedades semajantes a las funciones hiperbólicas $\sinh$, $\cosh$.

Propiedad 2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

(1)
$$\frac{e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}}{2} = \cos(\lambda)$$
(2)
$$\frac{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}}{2i} = \sin(\lambda)$$

Demostración.

(1)
$$\begin{aligned} e^{i\lambda} + e^{-i\lambda} &= \cos(\lambda) + i\sin(\lambda) + \underbrace{\cos(-\lambda)}_{\cos(\lambda)} + i\underbrace{\sin(-\lambda)}_{-\sin(\lambda)} \\ &= 2\cos(\lambda) \end{aligned}$$

(2) Tarea.

□

Regresando al problema original;

$$ay'' + by' + c = 0$$

donde $b^2 - 4ac < 0$. Entonces tenemos dos soluciones

$$y_1 = e^{r_+ x}, \quad y_2 = e^{r_- x}$$

donde

$$r_{\pm} = \underbrace{\frac{\lambda}{2a}}_{\lambda} \pm i \underbrace{\sqrt{4ac-b^2}}_{\mu}$$

Tenemos el conjunto fundamental de soluciones

$$y_1 = e^{(\lambda+i\mu)x}, \quad y_2 = e^{(\lambda-i\mu)x}$$

lo que significa que cualquier solución de $L[y]=0$ es de la forma

$$y = c_1 e^{(\lambda+i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda-i\mu)x}$$

pero aquí c_1, c_2 no son arbitrarios, sino que tienen que ser elegidos de tal forma que que resulten soluciones reales. Tal complicación se puede superar si usamos el principio de superposición. Tenemos que y_1, y_2 soluciones, entonces $(1/2)(y_1+y_2)$ y $(1/(2i))(y_1-y_2)$ lo son también. Calculemos

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= e^{\lambda x} e^{i\mu x} + e^{\lambda x} e^{-i\mu} \\ &= e^{\lambda x}(e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}) \\ &= 2e^{\lambda x}\cos(\mu x), \text{ según la propiedad } 2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= e^{\lambda x} e^{i\mu x} - e^{\lambda x} e^{-i\mu x} \\ &= e^{\lambda x}(e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}) \\ &= 2ie^{\lambda x}\sin(\mu x), \text{ según la propiedad } 2. \end{aligned}$$

es decir $e^{\lambda x}\cos(\mu x)$, $e^{\lambda x}\sin(\mu x)$ son también soluciones. Aún más, son fundamentales, pues su wronskiano es

$$\begin{aligned} W(e^{\lambda x}\cos(\mu x), e^{\lambda x}\sin(\mu x)) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda x}\cos(\mu x) & e^{\lambda x}\sin(\mu x) \\ \lambda e^{\lambda x}\cos(\mu x) - \mu e^{\lambda x}\sin(\mu x) & \lambda e^{\lambda x}\sin(\mu x) + \mu e^{\lambda x}\cos(\mu x) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\lambda x} \begin{vmatrix} \cos(\mu x) & \sin(\mu x) \\ \lambda\cos(\mu x) + \mu\sin(\mu x) & \lambda\sin(\mu x) + \mu\cos(\mu x) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\lambda x} \begin{vmatrix} \cos(\mu x) & \sin(\mu x) \\ -\mu\sin(\mu x) & \mu\cos(\mu x) \end{vmatrix} \\ &= \mu e^{2\lambda x} \neq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 47. Encontrar la solución general de

$$y'' + y' + y = 0$$

Sol. La ecuación característica es

$$r^2 + r + 1 = 0$$

cuyas soluciones son

$$r_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

lo que implica que la solución general es

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

2. Ecuaciones no homogéneas

PROPIEDAD 3. *Sea* $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$. *Entonces*

(1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$
(2) *Si* $c \in \mathbb{R}$ *constante,* $L[cy] = cL[y]$.

Tratamos ahora de mostrar la técnica para resolver ecuaciones de la forma

$$L[y] = g(x).$$

La idea principal se encuentra en el siguiente trivial, pero importante lema.

LEMA 1. *Si* y_1, y_2 *son soluciones de la ecuación lineal no homogénea*

$$L[y] = g(x)$$

entonces $y_1 - y_2$ *es solución de la ecuación homogénea*

$$L[y] = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos

$$\begin{aligned} L[y_1 - y_2] &= L[y_1] - L[y_2] \\ &= g(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

es decir, $y_1 - y_2$ es solución de $L[y] = 0$. □

TEOREMA 5. *Si* y_p *es alguna solución no homogénea*

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{24}$$

entonces cualquier otra solución $\phi(x)$ *de* (24)*, puede expresarse como*

$$\phi(x) = y_p(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

para algunos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *constantes, donde* y_1, y_2 *son soluciones fundamentales de la ecuación homogénea* $L[y] = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi = \phi(x)$ una solución de $L[y] = g(x)$. Entonces, por el lema 1, $\phi(x) - y_p(x)$ es solución de la homogénea; lo que implica que pueden encontrarse c_1, c_2 constantes tales que

$$\phi(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

o lo que es equivalente

$$\phi(x) = \underbrace{y_p(x)}_{\text{solución particular}} + \underbrace{c_1y_1(x) + c_2y_2(x)}_{\text{solución complementaria}}$$

□

Con la teoría expuesta la solución complementaria es fácil de encontrar. El problema es, entonces, encontrar las soluciones particulares. Una técnica útil es el *método de superposición* supóngase que tenemos que

$$L[y] = g_1(x) + \cdots g_m(x). \tag{25}$$

Lo que podemos hacer es tratar de resover por "pedazos":

$$L[y] = g_1(x) \mapsto y_{p_1} \text{ solución particular,}$$
$$\vdots$$
$$L[y] = g_m(x) \mapsto y_{p_m} \text{ solución particular,}$$

entonces $y_p = y_{p_1} + \cdots y_{p_m}$ es solución particular de (25):

$$L[y_{p_1} + \cdots y_{p_m}] = g_1(x) + \cdots + g_m(x)$$

Ejemplo 48. Encontrar la solución general de

$$y'' + 4y = 1 + x + \sin(x)$$

Sol. Primero consideramos la ecuación homogńea

$$y'' + 4y = 0 \tag{26}$$

que tiene ecuación característica $r^2 + 4 = 0$, cuyas soluciones son $r_\pm = \pm 2i$. Entonces unas soluciones fundamentales de (26) son

$$e^{0 \cdot x} \cos(2x), \quad e^{0 \cdot x} \sin(2x)$$

es decir, la solución complementaria de la ecuación no homogénea es

$$y_c = k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x).$$

Ahora, según el teorema 5, tenemos que encontrar una solución particular de la no homogénea. Para ésto superponemos:

$$y'' + 4y = 1$$
$$y'' + 4y = x$$
$$y'' + 4y = \sin(x)$$

siendo que la primera ecuación tiene solución $y_1 = 1/4$, la segunda, $y = (1/4)x$ y la tercera $y = (1/3)\sin(x)$ (como se encuentran éstas soluciones será el tema de la seguiente sección). Entonces, la solución general de la ecuación del enunciado del problema es

$$\boxed{y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}\sin(x) + k_1 \cos(2x) + k_2 \sin(2x)}$$

donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

3. Coeficientes indeterminados

Según el teorema 5, el problema de resolver ecuaciones diferenciales lineales se reduce a encontrar soluciones particulares. Una de las formas de encontrar tales soluciones particulares es el *método de coeficientes indeterminados*, que exponemos enseguida.

Recordemos que tenemos que resolver

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{27}$$

con a, b, c constantes. La idea es que el lado derecho de tal ecuación nos da una pista de como tienen que ser las soluciones particulares.

Caso: $g(x)$ tiene $\sin(x)$ ó $\cos(x)$. Se proponen soluciones del tipo

$$y = A\sin(x) + B\cos(x)$$

con A, B constantes a calcular (de aquí el nombre de "coeficentes indeterminados").

Caso: $g(x)$ **tiene** x^n. Proponer

$$y = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \cdots$$

con n adecuado, y de nuevo, hay que calcular las constantes $A, B, C, \ldots$

EJEMPLO 49. Encontrar una solución particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$$

Sol. Proponemos

$$y_p = A\cos(x) + B\sin(x).$$

Entonces

$$y_p' = -A\sin(x) + B\cos(x), \quad y_p'' = -A\cos(x) - B\sin(x),$$

sustituyendo en la ecuación del enunciado del problema,

$$\begin{aligned} -A\cos(x) - B\sin(x) + 3A\sin(x) - 3B\sin(x) - 3\cos(x) - 4A\cos(x) - 4B\sin(x) \\ = 2\sin(x) \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$-(A + 3B + 4A)\cos(x) + (3A - 5B)\sin(x) = 2\sin(x)$$

lo cual implica (pues las funciones $\sin(x), \cos(x)$ son linealmente independientes), que

$$\begin{aligned} 3A - 5B &= 2 \\ -5A - 3B &= 0 \end{aligned}$$

sistema que puede ser resuelto por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 2 \\ -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & -25 & 10 \\ -15 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & -25 & 10 \\ 0 & -34 & 10 \end{array}\right)$$

por lo que $B = -10/34$ y $3A+50/34 = 2 = 68/34$, lo que implica que $A = 18/102$. Entonces la solución particular buscada es

$$\boxed{y_p = \frac{18}{102}\cos(x) - \frac{5}{17}\sin(x)}$$

La sesión correspondiente a *Maxima* es:

Maxima — * Initialization Cell *

```
depends(y,x);
```

$$[y(x)]$$

Maxima

```
nonh:diff(y,x,2)-3*diff(y,x)-4*y=2*sin(x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-3\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-4\,y=2\,\sin x$$

Maxima

```
ode2(nonh,y,x);
```

$$y=-\frac{5\,\sin x-3\,\cos x}{17}+\%\mathrm{k1}\,e^{4\,x}+\%\mathrm{k2}\,e^{-x}$$

Nótese que el primer sumando es la solución particular que habíamos encontrado. Mientras que los sumandos restantes corresponden a la solución complementaria.

EJEMPLO 50. Encontrar una solución particular de

$$y''-3y'-4y=4x^2$$

Sol. Se propone

$$y_p=Ax^2+Bx+C.$$

Luego,

$$y_p'=2Ax+B$$
$$y_p''=2A$$

sustituyendo en la ecuación diferencial del enunciado, queda

$$2A-6Ax-3B-4Ax^2-4Bx-4C=4x^2$$

equivalentemente

$$-4Ax^2-(6A+4B)x+(2A-3B-4C)=4x^2$$

igualando coeficientes

$$\begin{aligned}-4A&=4\\6A+4B&=0\\2A-3B-4C&=0\end{aligned}$$

lo que implica que $A=-1$, $B=3/2$ y $C=-13/8$. Por lo tanto

$$\boxed{y_p=-x^2+\frac{3}{2}x-\frac{13}{8}}$$

La sesión correspondiente en *Maxima*:

Maxima * Initialization Cell *

```
depends(y,x);
```

$$[y(x)]$$

Maxima

```
ecdif:diff(y,x,2)-3*diff(y,x)-4*y=4*x^2;
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-3\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-4\,y=4\,x^2$$

Maxima

```
ode2(ecdif,y,x);
```

$$y=\%\mathrm{k1}\,e^{4\,x}+\%\mathrm{k2}\,e^{-x}-\frac{8\,x^2-12\,x+13}{8}$$

Nótese que *Maxima* responde con más información de la que se requería en el ejemplo. No sólo da una solución particular, sino la solución general.

EJEMPLO 51. Encontrar una solución particular de

$$y''-3y'-4y=e^{-x}$$

Sol. Con la experiencia adquirida nos atrevemos a proponer una solución de la forma

$$y_p=Ae^{-x}.$$

Tenemos entonces

$$y_p'=-Ae^{-x}$$
$$y_p''=Ae^{-x}$$

y sustituyendo en la ecuación del enunciado del problema

$$Ae^{-x}+3Ae^{-x}-4Ae^{-x}=e^{-x}$$

lo cual nos conduce a la ecuación imposible $0=e^{-x}$. Esto significa que ninguna función del tipo $y=Ae^{-x}$ es una solución de la ecuación no homegéna, pues lo es de la homegénea. En tal caso, una posible solución se obtiene de multiplicar por x. Ensayamos con

$$y_p = Axe^{-x}.$$

entonces

$$y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$$
$$y_p'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial original se obtiene

$$-Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} - 3Ae^{-x} + 3Axe^{-x} - 4Axe^{-x} = e^{-x}$$

factorizando e^{-x} y cancelando tal factor común:

$$-5A = 1$$

por lo que $A = -1/5$ y así

$$\boxed{y_p = -\frac{1}{5}xe^{-x}}$$

es solución particular.

Ejemplo 52. Encontrar la solución general de

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

Sol. Primero resolvermos la ecuación homogénea

$$y'' - 2y' + y = 0$$

que tiene ecuación característica

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

que a su vez tiene por soluciones $r_\pm = 1$. Por lo que las soluciones fundamentales son $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ y así, la solución complementaria es

$$y_c = K_1e^x + K_2xe^x$$

Resta encontrar una solución particular de la no homogénea. Si proponemos $y_p = Ae^x$, no funcionará, pues es solución de la homogéna. Si intentamos multiplicar por x para proponer $y_p = Axe^x$ tampoco funciona, pues también es solución de la homogénea (de hecho es la segunda solución fundamental y_2). Intentamos multiplicando de nuevo por x, para proponer

$$y_p = Ax^2e^x.$$

Calculamos

$$y_p' = Ax^2e^x + 2Axe^x$$
$$y_p'' = Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x$$

sustituimos en la ecuación del enunciado del problema para obtener

$$2Ae^x = e^x$$

de modo que $A = 1/2$, y así,

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$$

y entonces la solución general es

$$\boxed{y = y_p + y_c = \frac{1}{2}x^2e^x + K_1e^x + K_2xe^x}$$

En *Maxima*:

Maxima — * Inicial *

```
depends(y,x);
```

$$[y(x)]$$

Maxima

```
ecdif:diff(y,x,2)-2*diff(y,x)+y=%e^x;
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y - 2\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + y = e^x$$

Maxima

```
ode2(ecdif,y,x);
```

$$y = \frac{x^2\,e^x}{2} + (\%\mathrm{k2}\,x + \%\mathrm{k1})\;e^x$$

Caso: $g(x) = e^{\alpha x}P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio. Se propone

$$y_p = (A_kx^k + \cdots A_1x + A_0)e^{\alpha x}$$

para k apropiado.

Caso: $g(x) = e^{\alpha x}P(x)\cos(\beta x)$ ó $e^{\alpha x}P(x)\sin(\beta x)$, donde $P(x)$ es polinomio. Se propone

$$y_p = (A_kx^k + \cdots A_1x + A_0)e^{\alpha x}\cos(\beta) + (B_kx^k + \cdots B_1x + B_0)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Ejemplo 53. Encontrar la solución general de

$$y'' + 4y = xe^x + x\sin(2x)$$

Sol. Primero resolvemos la homogénea:

$$y'' + 4y = 0$$

que tiene ecuación característica

$$r^2 + 4 = 0$$

y raíces $r_\pm = \pm 2i$. Entonces la solución complementaria

$$y_c = K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x).$$

Ahora tratamos de resolver la ecuación no homogénea por el método de superposición:

(1) $y'' + 4y = xe^x$
(2) $y'' + 4y = x\sin(2x)$

(1) Proponemos $y_{p_1} = (A_1x + A_0)e^x$. Entonces

$$y'_{p_1} = A_1e^x + (A_1x + A_0)e^x = e^x(A_1x + A_0 + A_1)$$
$$y''_{p_1} = e^x(A_1x + A_0 + 2A_1)$$

sustitutuyendo en (1):

$$e^x(5A_1x + 2A_1 + 5A_0) = xe^x$$

por lo que

$$5A_1 = 1$$
$$5A_0 + 2A_1 = 0$$

de donde $A_1 = 1/5$ y $A_0 = -2/25$. Por lo que

$$y_{p_1} = \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^x \tag{28}$$

(2) En principio deberímos proponer $y_{p_2} = (A_1x + A_0)\cos(2x) + (B_1x + B_0)\sin(2x)$. Pero

$$y'_{p_2} = -2\left(A_1x + A_0\right)\sin\left(2x\right) + B_1\sin\left(2x\right) + 2\left(B_1x + B_0\right)\cos\left(2x\right) + A_1\cos\left(2x\right)$$
$$y''_{p_2} = -4\left(B_1x + B_0\right)\sin\left(2x\right) - 4A_1\sin\left(2x\right) - 4\left(A_1x + A_0\right)\cos\left(2x\right) + 4B_1\cos\left(2x\right)$$

al sustituir en la ecuación (2) se obtiene la ecuación imposible

$$4B_1\cos\left(2x\right) - 4A_1\sin\left(2x\right) = x\sin(x)$$

por lo que multiplicamos por x nuestra primera propuesta para obtener

$$y_{p_2} = (A_1x^2 + A_0x)\cos(2x) + (B_1x^2 + B_0x)\sin(2x)$$

y derivando,

$$y'_{p_2} = -2A_1x^2\sin\left(2x\right) + 2B_1x\sin\left(2x\right) - 2A_0x\sin\left(2x\right) + B_0\sin\left(2x\right) + 2B_1x^2\cos\left(2x\right)$$
$$+ 2A_1x\cos\left(2x\right) + 2B_0x\cos\left(2x\right) + A_0\cos\left(2x\right)$$
$$y''_{p_2} = -4B_1x^2\sin\left(2x\right) - 8A_1x\sin\left(2x\right) - 4B_0x\sin\left(2x\right) + 2B_1\sin\left(2x\right)$$
$$-4A_0\sin\left(2x\right) - 4A_1x^2\cos\left(2x\right) + 8B_1x\cos\left(2x\right) - 4A_0x\cos\left(2x\right) + 2A_1\cos\left(2x\right) + 4B_0\cos\left(2x\right)$$

y sustituyendo en (2):

$$-8A_1 x\sin(2x)+2B_1\sin(2x)-4A_0\sin(2x)+8B_1 x\cos(2x)+2A_1\cos(2x)+4B_0\cos(2x) = x\sin(2x)$$

es decir

$$-8A_1 x\sin(2x)+(2B_1-4A_0)\sin(2x)+8B_1 x\cos(2x)+(2A_1+4B_0)\cos(2x) = x\sin(2x)$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} -8A_1 &= 1\\ (2B_1-4A_0) &= 0\\ 8B_1 &= 0\\ 2A_1+4B_0 &= 0 \end{aligned}$$

por lo que $A_1 = -1/8$, $B_1 = 0$, $A_0 = 0$, $B_0 = 1/16$. entonces

$$y_{p_2} = -\frac{1}{8}x^2\cos(2x)+\frac{1}{16}x\sin(2x)$$

Por lo tanto, una solución particular de la ecuación no homogénea de la ecuación original es

$$y_p = y_{p_1}+y_{p_2} = \left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}\right)e^x-\frac{1}{8}x^2\cos(2x)+\frac{1}{16}x\sin(2x)$$

y la solución general buscada es

$$\boxed{y = y_p+y_c = \left(\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}\right)e^x-\frac{1}{8}x^2\cos(2x)+\frac{1}{16}x\sin(2x)+K_1\cos(2x)+K_2\sin(2x)}$$

Si usamos *Maxima* parece que obtenemos un resultado diferente:

Maxima — * Initialization Cell *

```
depends(y,x);
```

$$[y(x)]$$

Maxima

```
ecdif:diff(y,x,2)+4*y=x*%e^x+x*sin(2*x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+4\,y = x\,\sin(2\,x)+x\,e^x$$

Maxima

```
sol:ode2(ecdif,y,x);
```

$$y=\frac{100\,x\,\sin\left(2\,x\right)+\left(25-200\,x^2\right)\,\cos\left(2\,x\right)+\left(320\,x-128\right)\,e^x}{1600}+\%\mathrm{k1}\,\sin\left(2\,x\right)+\%\mathrm{k2}\,\cos\left(2\,x\right)$$

Para distribuir el denominador usamos `expand`

Maxima

```
expand(sol);
```

$$y=\frac{x\,\sin\left(2\,x\right)}{16}+\%\mathrm{k1}\,\sin\left(2\,x\right)-\frac{x^2\,\cos\left(2\,x\right)}{8}+\%\mathrm{k2}\,\cos\left(2\,x\right)+\frac{\cos\left(2\,x\right)}{64}+\frac{x\,e^x}{5}-\frac{2\,e^x}{25}$$

Nótese que

$$K_2\cos(2x)+\frac{\cos(2x)}{64}=\underbrace{(K_2+\frac{1}{64})}_{C_2}\cos(2x)$$

y entonces el resultado dado por *Maxima* puede escribirse como

$$y=\frac{xe^x}{5}-\frac{2e^x}{25}+\frac{x\sin(2x)}{16}-\frac{x^2\cos(2x)}{8}+\%\mathrm{K1}\sin(2x)+C_2\cos(2x)$$

que es la respuesta que obtuvimos a mano.

Tarea 10. *Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones. Si hay condiciones iniciales, encontrar la solución única.*

(1) $y''+y'-2y=2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
(2) $2y''-4y'-6y=3e^{2x}$.
(3) $y''+4y=x^2+3e^x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$
(4) $y''-2y'+y=xe^x+4$, $y(0)=1$, $y'(1)=1$
(5) $2y''+3y'+y=x^2+3\sin(x)$.
(6) $y''+y=3\sin(2x)+x\cos(2x)$
(7) $y''+y'+4y=2\sinh(x)$. *Sugerencia:* $\sinh(x)=(e^x-e^{-x})/2$.

4. Variación de parámetros

El método de *variación de parámetros* sirve también para encontrar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Es más general que el método de variación de parametros, pues a diferencia de éste, se puede emplear aunque los coeficientes de la ecuación diferencial no sean constantes.

El método de variación de parámetros es como sigue: supóngase que se quiere encontrar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{29}$$

Se proponen soluciones del tipo

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + c_1(x)y_2(x)$$

donde $y_1(x)$, $y_2(x)$ son soluciones fundamentales de la ecuación homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{30}$$

y los coeficientes $c_1(x), c_2(x)$ no son necesariamente constantes (de aquí el nombre *variación de parámetros*). Derivamos y_p:

$$y_p' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'.$$

Para facilitar los cálculos se presupone

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \tag{31}$$

por lo que

$$y_p' = c_1y_1' + c_2y_2'$$

y entonces, la segunda derivada es

$$y_p'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''.$$

Sustituyendo en la ecuación no homogénea (29) se obtiene

$$c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'' + pc_1'y_1 + pc_1y_1' + pc_2'y_2 + pc_2y_2' + qc_1y_1 + qc_2y_2 = g$$

de donde factorizamos c_1 y c_2:

$$c_1\underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{0} + c_2\underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{0} + (c_1'y_1' + c_2'y_2') = g$$

pues y_1 y y_2 son soluciones de la homogénea. Por lo que

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = g \tag{32}$$

Juntas la ecuaciones (31), (32) forman el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccc} c_1'y_1 & + & c_2'y_2 & = & 0 \\ c_1'y_1' & + & c_2'y_2' & = & g \end{array}$$

donde $y_1, y_1'y_2, y_2'$ son conocidas y c_1', c_2' son desconocidas. Usando la regla de Cramer podemos despejar c_1' y c_2':

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-g(x)y_2}{W(y_1,y_2)}, \quad c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}$$

por lo que

$$c_1 = \int \frac{-g(x)y_2}{W(y_1,y_2)}\,dx, \quad c_2 = \int \frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}\,dx$$

Hemos demostrado:

Teorema 6. *Si p, q, g son funciones continuas en (α, β) y y_1, y_2 son soluciones fundamentales de la ecuación homogénea asociada a*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

entonces una solución particular es

$$y_p = \int_\alpha^x \left(y_2(t)\frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)} - y_1(t)\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)} \right) dt$$

Ejemplo 54. Determinar la solución general de

$$y'' + y = \sec(x), \quad 0 < x < \pi/2.$$

Sol. Primero resolvemos la ecuación homogénea

$$y'' + y = 0$$

que tiene ecuación característica

$$r^2 + 1 = 0$$

que tiene raíces $r_\pm = \pm i$. Por lo que las soluciones fundamentales son

$$y_1 = \cos(x), y_2 = \sin(x)$$

y entonces la solución complemetaria es

$$y_c = K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x).$$

Necesitamos ahora una solución particular de la no homogénea. Usaremos variación de parámetros. Proponemos

$$y_p = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\sin(x).$$

entonces, según el desarrollo anterior tenemos el sistema

$$\begin{array}{rcrcl} c_1'(x)\cos(x) & + & c_2'(x)\sin(x) & = & 0 \\ c_1'(x)\cos'(x) & + & c_2'(x)\sin'(x) & = & \sec(x) \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{rcrcl} c_1'(x)\cos(x) & + & c_2'(x)\sin(x) & = & 0 \\ -c_1'(x)\sin(x) & + & c_2'(x)\cos(x) & = & \sec(x) \end{array}$$

usando la regla de Cramer,

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ \sec(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{W(\cos(x), \sin(x))} = -\sin(x)\sec(x) = -\tan(x)$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & \sec(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \cos(x)\sec(x) = 1$$

por lo que

$$c_1(x) = -\int \tan(x)\, dx = -\ln|\sec(x)| + k_1, \quad c_2(x) = \int dx = x + k_2$$

pero como $x \in (0, \pi/2)$ entonces $\sec(x) = 1/\cos(x) > 0$ asi que

$$c_2 = \int \ln(\cos(x)) + k_1.$$

Por lo tanto, una solución particular de la no homogńea es

$$y_p = \ln(\cos(x))\cos(x) + x\sin(x)$$

y la solución general es

$$\boxed{y = y_p + y_c = \ln(\cos(x))\cos(x) + x\sin(x) + K_1\cos(x) + K_2\sin(x)}$$

En *Maxima*:

Maxima — * Initialization Cell *

```
depends(y,x);
```

$$[y\,(x)]$$

Maxima

```
ecdif:diff(y,x,2)+y=sec(x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y + y = \sec x$$

Maxima

```
ode2(ecdif,y,x);
```

$$y = \frac{\cos x\,\log\left(\frac{\cos(2\,x)+1}{2}\right) + 2\,x\,\sin x}{2} + \%\mathrm{k1}\,\sin x + \%\mathrm{k2}\,\cos x$$

Tarea 11.

(1) *Determine una solución particular, usando el método de variación de parámetros.*
   (a) $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$
   (b) $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$
   (c) $y'' + y = \tan(x)$, $0 < x < \pi/2$
   (d) $y'' + 9y = 9\sec^2(3x)$, $x > 0$

(2) *Verifique que x y xe^x son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a*

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3, \quad x > 0,$$

y encuentre la solución general.

(3) *Compruebe que* $(1+x)$ *y* e^x *son soluciones de la ecuación homogénea corresondiente a*

$$xy'' - (1+x)y' + y = x^2 e^{2x}, \quad x > 0,$$

y encuentre la solución general.

(4) *Verifique que* $x^{-1/2}\sin(x)$ *y* $x^{-1/2}\cos(x)$ *son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 3x^{3/2}\sin(x), \quad x > 0$$

y encuentre la solución general.

(5) *Encuentre una fórmula para una solución particular de la ecuación diferencial*

$$y'' - 5y' + 6y = g(x)$$

5. Soluciones en series de potencias

Para cuando se quiere resolver ecuaciones diferenciales del tipo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{33}$$

con $P(x), Q(x), R(x)$ polinomios, es conveniente, a veces usar soluciones es series de potencias, es decir, se proponen soluciones del tipo

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \tag{34}$$

donde a es un *punto ordinario ó regular* de (33).

Definición 55. *Un número* $a \in \mathbb{R}$ *se llama punto ordinario o regular de* (33) *si* $P(a) \neq 0$.

Además se buscan soluciones de (33) en intervalos (α, β) que contengan puntos regulares.

Es útil tener en cuenta que

Propiedad 4.

(1)
$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

(2)
$$\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-a)^{n-2}$$

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} (x-a)^m$$

(4)
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-a)^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} (x-a)^m$$

(5)
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \Leftrightarrow a_n = b_n, \quad \forall n \geq 0.$$
(6)
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n \pm c_n)(x-a)^n$$
(7)
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = b_0 + b_1(x-a) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(x-a)^n$$

Ejemplo 56. Encontrar una solución de
$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Sol. Se propone $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a = 0$ es un punto ordinario). Entonces
$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$
Podemos poner
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$
y sustituyendo en la ecuación diferencial original,
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0} a_n x^n = 0$$
es decir
$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n)x^n = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$$
por lo que
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
despejando,
$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
Dando valores a n se obtiene
$$\begin{array}{cc} a_2 = -\frac{a_0}{2} & a_3 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} \\ a_4 = -\frac{a_2}{3\cdot 4} = \frac{a_0}{4!} & a_5 = -\frac{a_3}{4\cdot 5} = \frac{a_1}{5!} \\ a_6 = -\frac{a_0}{6!} & a_7 = -\frac{a_1}{7!} \end{array}$$
etcétera. Por lo que
$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 - \frac{a_0}{6!}x^6 - \frac{a_0}{6!}x^6 - \frac{a_0}{7!}x^7 + \cdots \\ &= a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$
es decir
$$\boxed{y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

donde $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

Notemos que los desarrollos en serie de MacLaurin de $\sin$ y $\cos$ son

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

y entonces la respuesta del ejemplo inmediato anterior puede escribirse

$$y = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$$

que es lo que hubieramos obtenido de resolver usando la ecuación característica.

Ejemplo 57. Encontrar una solución en potencias de x (=alrededor de 0) de la ecuación de Airy

$$y'' = xy$$

y entontrar el intervalo donde está definida la solución.

Sol. Se propone $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Luego, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ y $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. Sustituyendo en la ecuación de Airy:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} &= x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0} a_n x^{n+1}\end{aligned}$$

Haciendo el corrimiento de índices $k = n-2$ i.e. $n = k+2$ en el lado izuierdo y $k = n+1$ del lado derecho:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k$$

que es equivalente a

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k$$

lo que significa, usando la definición de igualdad entre series que

$$2a_2 = 0, \quad (k+2)(k+1)a_{k+2} = a_{k-1},\ k \geq 1,$$

ó equivalentemente,

$$a_2 = 0, \quad a_{k+2} = \frac{k-1}{(k+1)(k+2)},\ k \geq 1.$$

Evaluamos algunos valores en k:

$k = 1 : a_3 = \dfrac{a_0}{2 \cdot 3}$, $\quad k = 2 : a_4 = \dfrac{a_1}{3 \cdot 4}$, $\quad k = 3 : a_5 = \dfrac{a_2}{4 \cdot 5} = 0$

$k = 4 : a_6 = \dfrac{a_3}{5 \cdot 6} = \dfrac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$, $\quad k = 5 : a_7 = \dfrac{a_4}{6 \cdot 7} = \dfrac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$, $\quad k = 6 : a_8 = \dfrac{a_5}{7 \cdot 8} = \dfrac{0}{7 \cdot 8} = 0$

$k = 7 : a_9 = \dfrac{a_6}{8 \cdot 9} = \dfrac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$, $\quad k = 8 : a_{10} = \dfrac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}$, $\quad k = \dfrac{a_5}{?} = 0$,

Observamos que en general, lo coeficientes no cero son de la forma

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (3n-1)(3n)}, \quad a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots (3n)(3n+1)}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación de Airy es

$$y = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3n-1)3n} + \cdots\right)$$
$$+a_1 \left(x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{x^{10}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3n(3n+1)} + \cdots\right)$$

o bien

$$\boxed{y = a_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3n-1)3n}\right) + a_1\left(x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3n(3n+1)}\right)} \tag{35}$$

Calculemos ahora el radio de convergencia ρ de la serie del primer sumando de la solución general:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x^{3(n+1)}|}{2\cdot3\cdot5\cdot6\ldots(3n-1)3n(3n+2)(3n+1)}}{\frac{|x^{3n}|}{2\cdot3\cdot5\cdot6\ldots(3n-1)3n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{|x^3|}{(3n+2)(3n+3)}\\ &= 0 < 1, \quad \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

por tanto el radio de convergencia es $\rho = \infty$; lo que implica que la serie del primer sumando de la solución general converge para $x \in (-\infty, \infty)$. De forma similar, la serie

$$x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3n(3n+1)}$$

converge $\forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto la solución es válida en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Aún más, si ponemos $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$ en (35) obtenemos como solución

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n(3n-1)\ldots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}$$

y si ponemos $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ se obtiene que

$$y_2 = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n(3n+1)\ldots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}$$

es otra solución, y

$$\begin{aligned}W(y_1, y_2)(0) &= \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0)\\ y_1'(0) & y_2'(0)\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ &= 1\end{aligned}$$

Por lo tanto $W(y_1, y_2) \neq 0$ y así, $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo 58. Encontrar una solución en serie de potencias de $(x-1)$ (=alrededor de 1), de la ecuación de Airy

$$y'' = xy$$

Sol. Se require

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

luego

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-1)^k; \\ y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} (x-1)^k. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de Airy,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n &= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\ &= (1+(x-1)) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} (x-1)^k \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + a_{n-1}\right)(x-1)^n. \end{aligned}$$

Tenemos

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n-1})(x-1)^n$$

entonces, igualando coeficientes

$$\begin{cases} 2a_2 = a_0 \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \ n \geq 1 \end{cases}$$

despejando,

$$\begin{cases} a_2 = a_0/2 \\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \ n \geq 1. \end{cases}$$

Calculemos los primeros coeficientes,

$a_2 = a_0/2$

$a_3 = (a_1 + a_0)/(3 * 2) = a_1/6 + a_0/6$

$a_4 = (a_2 + a_1)/12 = a_0/24 + a_1/12$

$a_5 = (a_3 + a_2)/(5 * 4) = a_1/120 + a_0/120 + a_0/40 = a_1/120 + 4a_0/120 = a_1/120 + a_0/30$

entonces

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 + \frac{1}{30}(x-1)^5 + \frac{1}{34}(x-1)^6 + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left((x-1) + \frac{1}{6}(x-3)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4 + \frac{1}{120}(x-1)^5 + \cdots\right)$$

Ejemplo 59. Encontrar la solución de

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

(ecuación de Hermite) donde λ es constante.

Sol. Se propone

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

luego, como siempre

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2a_{n+1}x^{n+1}}_{k=n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{k=1}^{\infty} 2ka_k x^k + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda x^n$$

$$= 2a_2 + a_0\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + a_n\lambda\right) x^n$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0\lambda = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n = 0, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{a_0\lambda}{2} \\ a_{n+2} = \frac{a_n(2n-\lambda)}{(n+2)(n+1)}, \quad \geq 1. \end{cases}$$

luego,

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{a_1(2-\lambda)}{3\cdot 2}\\
a_4 &= \frac{a_2(4-\lambda)}{4\cdot 3} = -a_0\frac{\lambda(4-\lambda)}{4!}\\
a_5 &= \frac{a_3(6-\lambda)}{5\cdot 4} = a_1\frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}\\
a_6 &= \frac{a_4(8-\lambda)}{6\cdot 5} = -a_0\frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6!}\\
a_7 &= a_1\frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)}{7!}\\
a_9 &= -a_0\frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)(12-\lambda)}{8!}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1x - a_0\frac{\lambda}{2}x^2 + a_1\frac{2-\lambda}{3!} - a_0\frac{\lambda(4-\lambda)}{4!}x^4 + \cdots\\
&= a_0\left(1 - \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda(4-\lambda)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6!}x^6 - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)(12-\lambda)}{8!}x^8 - \cdots\right)\\
&+ a_1\left(x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)}{7!}x^7 + \cdots\right)\\
&= a_0\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)\cdots(4(n-1)+2-\lambda)}{(2n)!}\,x^{2n}\right)\\
&\qquad + a_1\left(x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-\lambda)(6-\lambda)\cdots(4n-2-\lambda)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

Además, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)\cdots(4(n-1)+2-\lambda)}{(2n)!}\,x^{2n}$$

converge para $\forall x \in \mathbb{R}$, pues, calculando su radio de convergencia absoluta usando el criterio de la razón,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\lambda(4-\lambda)\cdots(4-4-\lambda)}{(2(n+1))!}|x|^{2n+2}}{\frac{\lambda(4-\lambda)\cdots(4n-4-\lambda)}{(2n)!}|x|^{2n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)-4\lambda}{2(n+1)(2n+1)}\,|x|^2\\
&= |x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)-4\lambda}{2(n+1)(2n+1)}\\
&= |x|^2\cdot 0 < 1
\end{aligned}$$

lo cual implica que la serie en cuestión converge, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Similarmente, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-\lambda)(6-\lambda)\cdots(4n-2-\lambda)}{(2n+1)!}x^{2n}$$

tiene radio de convergencia $\rho = \infty$. Por lo tanto, la solución encontrada es válida $\forall x \in \mathbb{R}$.

TAREA 12. *Encontrar soluciones en serie de potencias alrededor del punto a dado.*

(1) $y'' - y = 0$, $a = 0$
(2) $y'' - xy' - y = 0$, $a = 0$
(3) $y'' - xy' - y = 0$, $a = 1$
(4) $y'' + k^2x^2y = 0$, $a = 0$, k *constante.*
(5) $(1 - x)y'' + y = 0$, $a = 0$

CAPíTULO 4

La transformada de Laplace

La transformada de Laplace es un mecanismo que sirve para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales lineales, alternativo al método de la ecuación característica. Resulta que tal mecanismo cambia las derivadas de funciones por multiplicaciones, como veremos más adelante.

El uso de la transformada de Laplace es particularmente útil en el análisis de los circuitos eléctricos.

La transformada de Laplace es un caso particular de una *transformada integral*.

DEFINICIÓN 60. *Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ dos conjuntos de funciones. Una transformada integral, es una función del tipo*

$$T : \mathcal{F} \to \mathcal{G}, \quad f \mapsto T[f]$$

donde

$$T[f](s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t)\, dt$$

para ciertos K, α, β fijos. La función K se llama núcleo ó kernel de T.

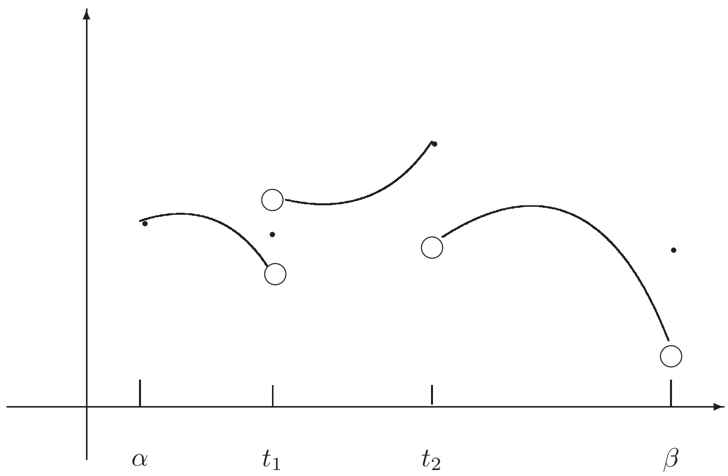
No cualquier función puede ser transformada bajo Laplace. Sólo las funciones seccionalmente continuas.

DEFINICIÓN 61. *Sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ función tal que $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ es partición del intervalo $[\alpha, \beta]$ con las siguientes características:*

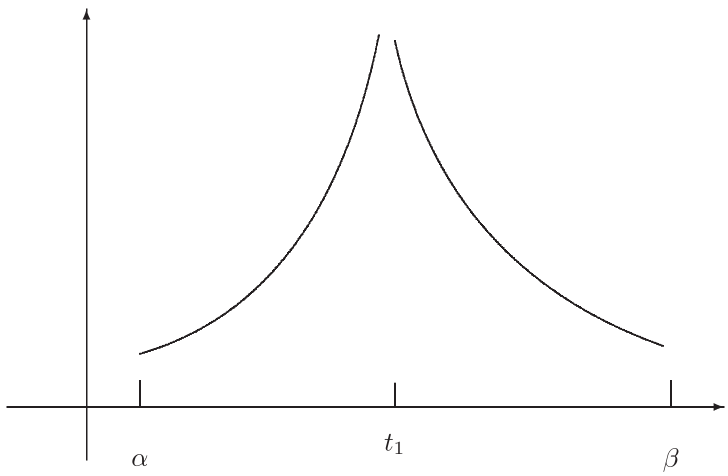
(1) *f es continua sobre cada (t_i, t_{i+1}), $i = 0, \ldots, n-1$;*
(2) *para cada i, $\lim_{t \to t_i^+} f(t) \in \mathbb{R}$, y además $\lim_{t \to t_{i+1}^-} f(t) \in \mathbb{R}$.*

Entonces f se llama seccionalmente continua.

EJEMPLO 62. La siguiente gráfica pertenece a una función seccionalmente continua.



Ejemplo 63. La siguiente es la gráfica de una función NO seccionalmente continua.



Definición 64 (Transformada de Laplace). *Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de funciones seccionalmente contunuas sobre el intervalo $[0, \infty)$ y $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones. Se define la transformada de Laplace como*

$$\mathcal{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{F}, \quad \mathcal{L}[f(t)] = F$$

donde

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Hay que recordar que la integral impropia

$$\int_0^\infty g(t)\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A g(t)\, dt$$

y si tal límite existe entonces se dice que la integral converge, en otro caso se dice que la integral diverge.

Ejemplo 65. Calcularemos la transformada de Laplace de la función constante uno: $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[1](s) &= \int_0^\infty e^{-st} 1 \, dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=0}^{t=A} \\
&= \lim_{t\to A} \frac{e^{-st}}{-s} + \frac{1}{s} \\
&= \begin{cases} \infty & \text{si } s < 0 \\ 1/s & \text{si } s > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ejemplo 66. Calcularemos ahora la transformada de Laplace de la función exponencial: sea $a \in \mathbb{R}$ constante.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}](s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} \, dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{(a-s)t} dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_{t=0}^{t=A} \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{e^{(a-s)A}}{a-s} - \frac{1}{a-s} \right) \\
&= \begin{cases} \infty & \text{si } a > s \\ \frac{1}{s-a} & \text{si } s > a. \end{cases}
\end{aligned}$$

Usualmente la transformada de Laplace sólo interesa cuando converge. Así, podemos poner

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

y para $t \geq 0$,

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

Ejemplo 67. En este ejemplo calcularemos la transformada de Laplace de la función seno: sea $a \in \mathbb{R}$ constante;

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(at)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \sin(at) \, dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \sin(at) \, dt
\end{aligned}$$

Calculemos la integral indefinida $\int e^{-st} \sin(at) dt$ por partes: haciendo

$$\begin{aligned}
u &= e^{-st} & dv &= \sin(at) dt \\
du &= -se^{-st} & v &= -\cos(at)/a
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int e^{-st}\sin(at)\,dt &= uv - \int v\,du\\ &= -\frac{e^{st}\cos(at)}{a} - \frac{s}{a}\int e^{-st}\cos(at)\,dt\end{aligned}$$

y de nuevo, ésta segunda integral la calculamos por partes haciendo

$$\begin{array}{ll} u = e^{-st} & dv = \cos(at)dt \\ du = -se^{-st} & v = \sin(at)/a \end{array}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\int e^{-st}\sin(at)\,dt &= -\frac{e^{st}\cos(at)}{a} - \frac{s}{a}\left(uv - \int vdu\right)\\ &= -\frac{e^{st}\cos(at)}{a} - \frac{s}{a}\left(\frac{e^{-st}\sin(at)}{a} + \frac{s}{a}\int \sin(at)e^{-st}\,dt\right)\\ &= -\frac{e^{st}\cos(at)}{a} - \frac{s}{a^2}e^{-st}\sin(at) - \frac{s^2}{a^2}\int \sin(at)e^{-st}\,dt\end{aligned}$$

despejando $\int e^{-st}\sin(at)dt$:

$$\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)\int e^{-st}\sin(t)\,dt = -\frac{e^{-st}\cos(at)}{a} - \frac{s}{a^2}e^{-st}\sin(at)$$

lo que es equivalente a

$$\begin{aligned}\int e^{-st}\sin(at)\,dt &= \frac{1}{\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)}\frac{-1}{a}\left(e^{-st}\cos(at) + \frac{s}{a}e^{-st}\sin(at)\right)\\ &= -\frac{a^2}{a^2+s^2}\left(e^{-st}\cos(at) + \frac{s}{a}e^{-st}\sin(at)\right)\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(at)](s) &= -\frac{a^2}{a^2+s^2}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-st}\cos(at) + \frac{s}{a}e^{-st}\sin(at)\right)\Big|_{t=0}^{t=A}\\ &= -\frac{a^2}{a^2+s^2}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-sA}\left(\cos(aA) + \frac{s}{a}\sin(aA)\right) - \frac{1}{a}\right)\\ &= \begin{cases}\frac{a}{a^2+s^2}, \text{ si } s>0;\\ \infty. \text{ si } s<0\end{cases}\end{aligned}$$

pues $|\cos(aA)+(s/a)\sin(aA)| \leq 1+s/a$, es decir la función $|\cos(at)+(s/a)\sin(at)$ está acotada y $\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0$, si $s>0$; lo que implica que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-sA}\left(\cos(aA + \frac{s}{a}\sin(aA))\right) = 0.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}[\sin(at)](s) = \begin{cases}\frac{a}{a^2+s^2}, \text{ si } s>0;\\ \infty. \text{ si } s<0.\end{cases}$$

Es común abusar de la notación e identificar a la regla de correspondencia de una función con la función misma. Abuso que aplicado a la transformada de Laplace indica que podemos ignorar el argumento s a coveniencia, y entonces escribir, por ejemplo

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad s > 0, \qquad \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$
$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{a^2+s^2}, \quad s > 0.$$

El siguiente teorema es trivial en su demostración, más no así en su contenido. Es una de las propiedades más útiles de la transformada de Laplace.

Teorema 7. *Sean $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones seccionalmente continuas. La transformada de Laplace es un operador lineal; ésto es,*

(1) *si $c \in \mathbb{R}$ constante, $\mathcal{L}[cf(t)] = c\mathcal{L}[f(t)]$;*
(2) $\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)]$.

Demostración.

(1)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[cf(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} cf(t)\, dt \\ &= c\int_0^\infty e^{-st} f(t) \\ &= c\mathcal{L}[f(t)]\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t) + g(t)] &= \int_0^\infty e^{-st}(f(t) + g(t))dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt \\ &= \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)]\end{aligned}$$

□

El siguiente teorema asegura que la transformada de Laplace cambia derivadas por productos.

Teorema 8. *Si $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es seccionalmente continua tal que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para algunas constantes $K, a \in \mathbb{R}$ y para $t \geq M$, entonces*

(1) $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$, *si $s > a$.*
(2) $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$, *si $s > a$.*

Demostración.

(1)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f'(t)dt. \qquad (36)\end{aligned}$$

Calculemos la integral indefinida $\int e^{-st}f'(t)dt$ por partes, poniendo,

$$u = e^{-st} \qquad\qquad dv = f'(t)dt$$
$$du = -se^{-st}dt \qquad\qquad v = f(t)$$

entonces

$$\begin{aligned}\int e^{-st}f'(t)dt &= uv - \int vdu \\ &= e^{-st}f(t) + s\int e^{-st}f(t)dt. \qquad (37)\end{aligned}$$

Notemos que en general

$$\left(\int g(t)dt\right)\Big|_a^b = \int_a^b g(t)dt \qquad (38)$$

luego, por (36), (37) y (38);

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \lim_{A\to\infty}\left(e^{-st} + s\int e^{-st}f(t)dt\right)\Big|_0^A \\ &= \lim_{A\to\infty}\left(e^{-st}\big|_0^A + \left(s\int e^{-st}f(t)dt\right)\Big|_0^A\right) \\ &= \lim_{A\to\infty}(e^{-sA}f(A) - f(0)) + \lim_{A\to\infty} s\int_0^A e^{st}f(t)dt \\ &= \lim_{A\to\infty}(e^{-sA}f(A) - f(0)) + s\mathcal{L}[f(t)] \qquad (39)\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}0 \le |e^{-sA}f(A)| &\le |e^{-sA}|\,|f(A)| \\ &\le e^{-sA}\,Ke^{aA}, \text{ por hipótesis, pues } A\to\infty \\ &= Ke^{A(a-s)}; \qquad (40)\end{aligned}$$

usando que $\lim_{A\to\infty} e^{A(a-s)} = 0$, si $a - s > 0$. Entonces, por el teorema de intercalación en (40), se obtiene que $\lim_{A\to\infty}|e^{-sA}f(A)| = 0$, si $s > a$; lo que es equivalente a $\lim_{A\to\infty} e^{-sA}f(A) = 0$. Y entonces de (39),

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0), \quad s > a$$

(2) Se obtiene como un proceso inductivo sobre n, aplicado el inciso inmediato anterior n veces. Veamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(2)}(t)] &= \mathcal{L}[df^{(1)}(t)/dt] \\ &= s\mathcal{L}[f^{(1)}(t)] - f^{(1)}(0), \text{ por el inciso (1) para } f^{(1)}(t), \\ &= s\,(s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)) - f^{(1)}(0), \text{ por inciso (1) para } f(t), \\ &= s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f^{(1)}(0);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(3)}(t)] &= \mathcal{L}[df^{(2)}(t)/dt] \\ &= s\mathcal{L}[f^2(t)] - f^{(2)}(t), \text{ por (1) para } f^{(2)}(t), \\ &= s\left(s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f^{(1)}(0)\right) - f^{(2)}(t), \text{ por el cálculo previo para } \mathcal{L}[f^{(2)}(t)], \\ &= s^3\mathcal{L}[f(t)] - s^2f(0) - sf^{(1)}(0) - f^{(2)}(0), \\ &\text{etcétera.}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 68. Resolver

$$y'' - y' - 2y = 0$$
$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Sol. Aplicamos la transformada de Laplace a cada lado de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}[y'' - y' - 2y] = \mathcal{L}[0] = 0$$

y como la transformada de Laplace es lineal, se obtiene,

$$\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = 0$$

usando el teorema 8 y las condiciones iniciales,

$$\left(s^2\mathcal{L}[y] - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y^{(1)}(0)}_{0}\right) - \left(s\mathcal{L}[y] - \underbrace{y(0)}_{1}\right) - 2\mathcal{L}[y] = 0$$

Pongamos $Y(s) = \mathcal{L}[y]$ para obtener

$$s^2Y(s) - s - sY(s) + 1 - 2Y(s) = 0$$

es decir,

$$(s^2 - s - 2)Y(s) = s - 1$$

despejamos la transformada de Laplace de y, $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2}$$

escribimos el lado derecho de ésta ecuación como suma de fracciones parciales,

$$\begin{aligned}\frac{s-1}{s^2-s-2} &= \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \\ &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} \\ &= \frac{A(s+1) + B(s-2)}{(s-2)(s+1)}\end{aligned}$$

ecuaciones que se cumplen si y sólo si

$$s - 1 = A(s+1) + B(s-2)$$

si en tal ecuación hacemos las sustituciones

$$s = 2 :\Rightarrow 1 = 3A \Leftrightarrow A = 1/3;$$
$$s = -1 :\Rightarrow -2 = -3B \Leftrightarrow B = 2/3$$

obtenemos

$$\frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}$$

lo que implica que

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}.$$

ahora hay que recordar que $\mathcal{L}[e^{at}] = 1/(s-a)$, si $s > a$ y que $\mathcal{L}$ es lineal;

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}[e^{2t}] + \frac{2}{3}\mathcal{L}[e^{-t}] \\ &= \mathcal{L}[\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}] \end{aligned}$$

es decir

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}]$$

pero se puede probar que $\mathcal{L}$ es función inyectiva, por lo que de la ecuación anterior podemos cancelar $\mathcal{L}$, y obtener la solución

$$\boxed{y = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}}$$

En el cálculo de fracciones parciales pudimos habernos ayudado de *Maxima*:

Maxima — * Initialization Cell *

```
cociente:(s-1)/(s^2-s-2);
```

$$\frac{s-1}{s^2-s-2}$$

la instrucción para descomponer en fracciones parciales es `partfrac`:

Maxima

```
partfrac(cociente,s);
```

$$\frac{2}{3\,(s+1)} + \frac{1}{3\,(s-2)}$$

Ejemplo 69. Resolver

$$y'' + y = \sin(2t)$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1$$

Sol. De nuevo aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación diferencial y obtenemos

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\sin(2t)]$$

y de nuevo, por el teorema 8 y como $\mathcal{L}[\sin(at)] = a/(s^2+a^2)$ para $s>0$,

$$s^2\mathcal{L}[y] - s\underbrace{y(0)}_{2} - \underbrace{y^{(1)}(0)}_{1} + \mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2+4}$$

y si ponemos $Y(s) = \mathcal{L}[y]$ y despejamos

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$\Leftrightarrow$

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s^2+4} + 2s + 1 = \frac{2+(s^2+4)(2s+1)}{s^2+4}$$

$\Leftrightarrow$

$$Y(s) = \frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

Y de nuevo, descomponenemos el lado derecho como una suma de fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}\\ &= \frac{(As+B)(s^2+4)+(s^2+1)(Cs+D)}{(s^2+1)(s^2+4)}\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}2s^3+s^2+8s+6 &= (As+B)(s^2+4)+(s^2+1)(Cs+D)\\ &= As^3+As+Bs^2+4B+Cs^3+Ds^2+Cs+D\\ &= (A+C)s^3+(B+D)s^2+(C+4A)s+4B+D\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ (igualando coeficientes)

$$\begin{aligned}A+C&=2 &\qquad C+4A&=8\\ B+D&=1 &\qquad 4B+D&=6\end{aligned}$$

ecuaciones que forman un sistema lineal de ecuaciones con incógnitas A, B, C, D y que puede ser resuelto por el método de Gauss, por ejemplo, ó usando *Maxima*:

Maxima * Initialization Cell *

```
solve([A+C=2,C+4*A=8,B+D=1,4*B+D=6],[A,B,C,D]);
```

$$\left[\left[A=2, B=\frac{5}{3}, C=0, D=-\frac{2}{3}\right]\right]$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{2s+5/3}{s^2+1} + \frac{-2/3}{s^2+4}\\ &= 2\frac{s}{s^2+1} + \frac{5}{3}\frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{s^2+4}\end{aligned}\tag{41}$$

De hecho pudimos haber obtenido tal descomposición usando *Maxima*:

Maxima

```
q:(2*s^3+s^2+8*s+6)/((s^2+4)*(s^2+1));
```

$$\frac{2\,s^3+s^2+8\,s+6}{\left(s^2+1\right)\,\left(s^2+4\right)}$$

Maxima

```
partfrac(q,s);
```

$$\frac{6\,s+5}{3\,\left(s^2+1\right)}-\frac{2}{3\,\left(s^2+4\right)}$$

Ahora, como $\mathcal{L}[\cos(at)] = s/(s^2+a^2)$, si $s > 0$ y $\mathcal{L}[\sin(at)] = a/(s^2+a^2)$, de la ecuación (41) obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] &= 2\mathcal{L}[\cos(t)] + \frac{5}{3}\mathcal{L}[\sin(t)] - \frac{1}{3}\mathcal{L}[\sin(2t)] \\ &= \mathcal{L}\left[2\cos(t) + \frac{5}{3}\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(2t)\right]\end{aligned}$$

cancelando $\mathcal{L}$ obtenemos la solución buscada:

$$\boxed{y = 2\cos(t) + \frac{5}{3}\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(2t)}$$

En *Maxima* el ejercicio anterior:

Maxima * Initialization Cell *

```
depends(y,t);
```

$$[y\,(t)]$$

declaramos ahora el lado izquierdo a resolver y le ponemos la etiqueta `izq`:

Maxima

```
izq:diff(y(t),t,2)+y(t)-sin(2*t);
```

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,y\left(t\right)-\sin\left(2\,t\right)+y\left(t\right)$$

declaremos las condiciones iniciales

Maxima

```
atvalue(y(t),t=0,2);
```

$$2$$

Maxima

```
atvalue(diff(y(t),t),t=0,1);
```

$$1$$

aplicamos la transformada de Laplace a tal lado izquierdo

Maxima

```
izq2:laplace(izq,t,s);
```

$$s^2\,\mathcal{L}\left(y\left(t\right),t,s\right)+\mathcal{L}\left(y\left(t\right),t,s\right)-\frac{2}{s^2+4}-2\,s-1$$

resolvemos la ecuación `izq2=0` con respecto a la transformada de Laplace $\mathcal{L}$:

Maxima

```
solve(izq2=0,[laplace(y(t),t,s)]);
```

$$\left[\mathcal{L}\left(y\left(t\right),t,s\right)=\frac{2\,s^3+s^2+8\,s+6}{s^4+5\,s^2+4}\right]$$

es decir tenemos la ecuación

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{s^4 + 5s^2 + 4}$$

que *resulta equivalente a*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{s^4 + 5s^2 + 4}\right)$$

y tal transformada inversa se calcula con la instrucción `ilt` que es acrónimo de *inverse Laplace transform*:

Maxima

```
ilt((2*s^3+s^2+8*s+6)/(s^4+5*s^2+4),s,t);
```

$$-\frac{\sin(2\,t)}{3} + \frac{5\,\sin t}{3} + 2\,\cos t$$

es decir, tenemos que

$$y(t) = -\frac{\sin(2t)}{3} + \frac{5\sin t}{3} + 2\cos t$$

que es la misma solución que obtuvimos antes.

Ejemplo 70. Resolver

$$\begin{gathered} 0 = y^{(4)} - y \\ y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 1, y^{(2)}(0) = 0, y^{(3)}(0) = 0. \end{gathered}$$

Sol. Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}[y^{(4)}] - \mathcal{L}[y] \\ &= \left(s^4\mathcal{L}[y] - s^3\underbrace{y(0)}_{0} - s^2\underbrace{y^{(1)}(0)}_{1} - s\underbrace{y^{(2)}}_{0} - \underbrace{y^{(3)}(0)}_{0}\right) - \mathcal{L}[y] \\ &= s^4Y(s) - s^2 - Y(s) \end{aligned}$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}[y]$. Despejando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}.$$

Ahora debemos descomponer el lado derecho en fraccciones parciales

$$
\begin{aligned}
\frac{s^2}{s^4-1} &= \frac{s^2}{(s^2-1)(s^2+1)} \\
&= \frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} \\
&= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}, \text{ con } A, B, C, D \in \mathbb{R} \\
&= \frac{A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (s^2-1)(Cs+D)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}
\end{aligned}
$$

igualando numeradores:

$$s^2 = A(s+1)(s^2+1) + B(s-1)(s^2+1) + (s^2-1)(Cs+D)$$

si en tal ecuación sustituimos

$$
\begin{array}{lrr}
s = 1: & 1 = 4A \Rightarrow & A = 1/4 \\
s = -1: & 1 = -4B \Rightarrow & B = -1/4 \\
s = 0: & 0 = A - B - D = 1/2 - D \Rightarrow & D = 1/2 \\
s = i: & -1 = -2(Ci + 1/2)ent1/2 = 1/2 + Ci &
\end{array}
$$

pero como $C \in \mathbb{R}$, se sigue que $C = 0$. Por tanto

$$\mathcal{L}[y] = Y(s) = \frac{1/4}{s-1} - \frac{1/4}{s+1} + \frac{1/2}{s^2+1}$$

lo que implica que

$$y = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

ahora hay que recordar que $\mathcal{L}[e^{at}] = 1/(s-a)$, $\mathcal{L}[\sin(at)] = a/(s^2+a^2)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin(t) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin(t) \\
&= \frac{1}{2}\sinh(t) + \frac{1}{2}\sin(t),
\end{aligned}
$$

pues, por definición, el seno hiperbólico, $\sinh(t) = (e^t - e^{-t})/2$.

TAREA 13. (1) *Use la transformada de Laplace para resolver el problema dado.*

(a) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y^{(2)} - 4y^{(1)} + y = 0$, $y(0) = 0$, $y^{(1)}(0) =$, $y^{(2)}(0) = 0$, $y^{(3)}(0) = 1$.
(b) $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = 1$, $y^{(1)}(0) = 0$, $y^{(2)}(0) = 1$, $y^{(3)}(0) = 0$.
(c) $y'' - 2y' + 2y = \cos(2t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
(d) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(2) *Sea*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t).$$

Demuestre que

(a) $F'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)]$

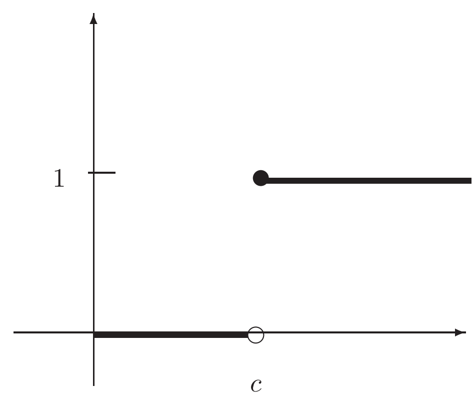
(b) $F''(s) = \mathcal{L}[t^2 f(t)]$

Las ecuaciones diferenciales aparecen, por ejemplo, en el estudio de circuitos eléctricos, donde a veces las cantidades no cambian de forma continua (como por ejemplo el voltaje). Aparecen entonces funciones como:

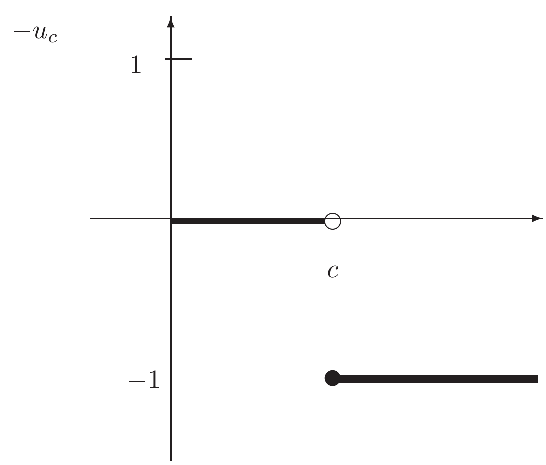
DEFINICIÓN 71. *Sea $c \in [0, \infty]$. Se define la función escalón unitario como*

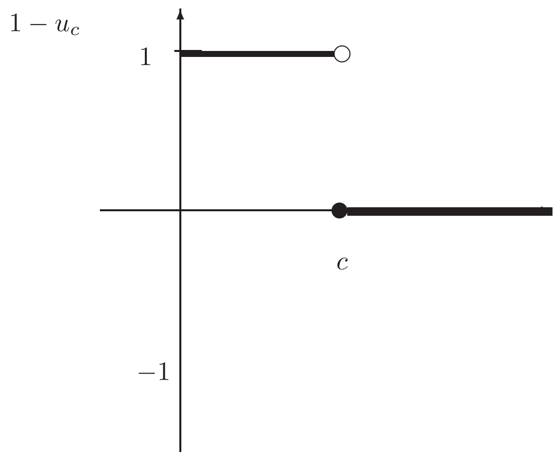
$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & \textit{si } t < c, \\ 1, & \textit{si } t \geq c. \end{cases}$$

La gráfica de u_c es

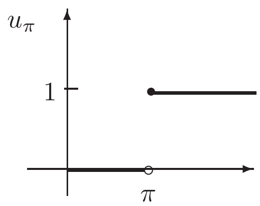


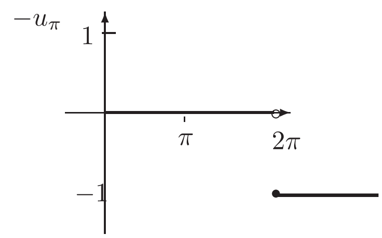
Obsérvese que



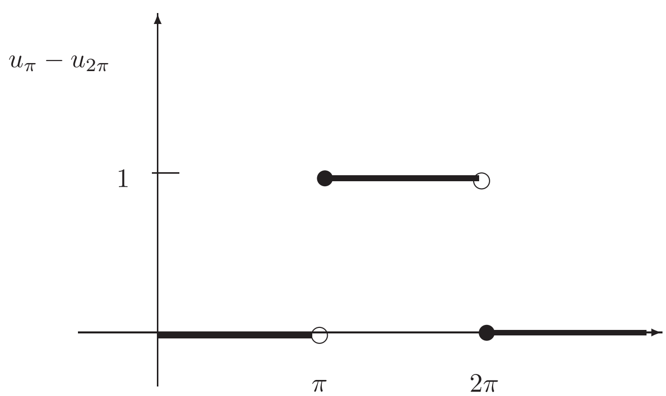


y que entonces





lo que implica que



es decir

$$(u_\pi - u_{2\pi})(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 1, & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & \text{si } 2\pi < t. \end{cases} \tag{42}$$

Propiedad 5.

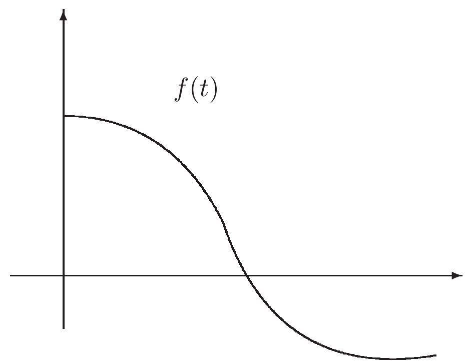
$$\mathcal{L}[u_c(t)] = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0.$$

Demostración.

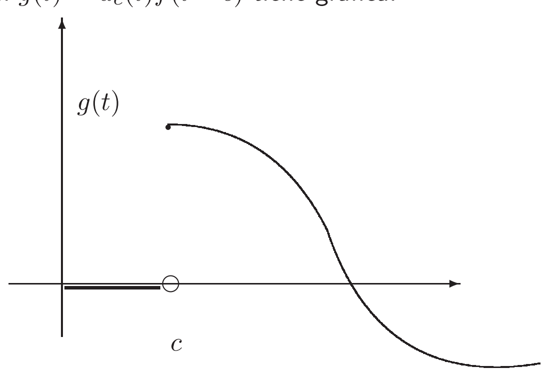
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u_c(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) dt \\
&= \int_0^c e^{-st} \underbrace{u_c(t)}_{0} dt + \int_c^\infty e^{-st} \underbrace{u_c(t)}_{1} dt \\
&= \int_c^\infty e^{-st} dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_c^A e^{-st} dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_c^A \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{e^{-sA}}{-s} - \frac{e^{-sc}}{-s} \right) \\
&= \frac{e^{-sc}}{s}, \text{ si } s > 0.
\end{aligned}$$

□

La multiplicación por la exponencial produce desplazamientos en la transformada. Para explicar ésto observamos que si una función $f(t)$ tiene gráfica



entonces la función $g(t) = u_c(t)f(t-c)$ tiene gráfica:



Teorema 9.

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)]$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] &= \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt \\
&= \int_c^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt \\
&= \lim_{A\to\infty}\int_c^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt \\
&(u=t-c; du=dt; u+c=t; u(A)=A-c) \\
&= \lim_{A\to\infty}\int_0^{A-C} e^{-s(u+c)}f(u) \\
&= e^{-sc}\lim_{A\to\infty}\int_0^{A-c} e^{-su}f(u)du \\
&= e^{-sc}\mathcal{L}[f(t)]
\end{aligned}$$

□

Corolario 1. *Si* $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ *entonces* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ *y*

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u_c(t)f(t-c).$$

Ejemplo 72. Se define

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t), & 0 < t < \pi/4; \\ \sin(t) + \cos(t-\pi/4), & t \geq \pi/4. \end{cases}$$

Encontrar $\mathcal{L}[f(t)]$.

Sol. Podemos escribir

$$f(t) = \sin(t) + u_{\pi/4}(t)\cos(t-\pi/4),$$

entonces, por linealidad de la transformada de Laplace,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[\sin(t)] + \mathcal{L}[u_{\pi/4}(t)\cos(t-4)] \\
&= \frac{1}{s^2+1} + e^{-s\pi/4}\mathcal{L}[\cos(t)], \text{ por el teorema 9,} \\
&= \frac{1}{s^2+1} + e^{-s\pi/4}\frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Ejemplo 73. Encontrar la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$$

Sol. Por linealidad de la transformada inversa de Laplace, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right]\end{aligned}$$

pero como $\mathcal{L}[t^n] = n!/s^{n+1}$ si $s > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, y el teorema 9, entonces

$$\frac{e^{-2s}}{s^2} = \mathcal{L}[u_2(t)(t-2)]$$

por lo que

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = t - u_2(t)(t-2)$$

de donde

$$\mathcal{L}[F(s)](t) = \begin{cases} t, & t < 2 \\ 2, & t \geq 2. \end{cases}$$

Teorema 10.

$$\mathcal{L}[e^{ct} f(t)] = F(s-c)$$

donde $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{ct} f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{t(c-s)} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(s-c)} f(t) dt \\ &= F(s-c).\end{aligned}$$

□

Ejemplo 74. Encontrar la transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$$

Sol. Completando cuadrados en el denominador

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 - 4s + 4) + 1} = \frac{1}{(s-2)^2 + 1}.$$

Recordemos que $F(s) = 1/(s^2+1) = \mathcal{L}[\sin(t)]$. Usando el teorema 10 obtenemos que

$$\mathcal{L}[e^{2t} \sin(t)] = F(s-2)$$

y concluimos que

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s-2)] = e^{2t} \sin(t)$$

Tarea 14. *Calcular la transformada inversa de Laplace de:*

(1)
$$F(s) = \frac{3!}{(s-2)^4}$$
(2)
$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$$
(3)
$$F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$$
(4)
$$F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s^2-4}$$

Ejemplo 75. Encontrar la solución de
$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$
donde
$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$
(carga en un condensador de un circuito eléctrico simple con voltaje en forma de pulso rectangular).

Sol. Podemos poner $g(t) = 1 - u_\pi(t)$. Luego,
$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[u_\pi(t)]$$
es decir
$$s^2Y(s) + sY(s) + \frac{5}{4}Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}$$
donde $Y(s) = \mathcal{L}[y]$. Despejando
$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+s+5/4)} - \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+s+5/4)} \tag{43}$$
luego, si
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+s+5/4)}\right]$$
entonces, por corolario 1,
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+s+5/4)}\right] = u_\pi h(t-\pi)$$
y entonces, de la ecuación (43) obtenemos:
$$y(t) = h(t) - u_\pi h(t-\pi) \tag{44}$$
sólo resta calcular $h(t)$, para lo cual descomponemos en fracciones parciales:
$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s^2+s+\frac{5}{3})} &= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+s+\frac{5}{4}} \\ &= \frac{A(s^2+s+5/4)+s(Bs+c)}{s(s^2+s+5/4)} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}1 &= A(s^2+s+5/4)+s(Bs+C)\\ &= As^2+As+(5/4)A+bs^2+sC\\ &= (A+B)s^2+(A+C)s+(5/4)A\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$A+B=0, A+C=0, 1=(5/4)A$$

$\Leftrightarrow$

$$A=\frac{5}{4}, B=-\frac{4}{5}=C.$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s^2+s+\frac{5}{3})} &= \frac{4/5}{s}-\frac{(4/5)s+4/5}{s^2+s+5/4}\\ &= \frac{4/5}{s}-\frac{(4/5)s+4/5}{(s+1/2)^2+1}\\ &= \frac{4}{5}\frac{1}{s}-\frac{4}{5}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+1}-\frac{4}{5}\frac{1}{(s+1/2)^2+1}\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+1}\right]-\frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1/2)^2+1}\right]\\ &= \frac{4}{5}-\frac{4}{5}e^{-t/2}\sin(t)-\frac{4}{5}e^{-t/2}\cos(t)\end{aligned}$$

puesto que $\mathcal{L}[\cos(t)]=s/(s^2+1)$, $\mathcal{L}[\sin(t)]=1/(s^2+1)$ y teorema 10. Sustituyendo ésta ecuación para $h(t)$ en (44), obtenemos

$$\boxed{y(t)=\frac{4}{5}\left(1-e^{-t/2}(\sin(t)+\cos(t))\right)-\frac{4}{5}u_\pi(t)\left(1-e^{-t/2}(\sin(t-\pi)+\cos(t-\pi))\right)}.$$

Tarea 15. *Resolver*

(1) $y''+y=f(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$,

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<\pi/2\\ 0, & \pi/2\le t<\infty\end{cases}$$

(2) $y''+2y'+2y=h(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$,

$$h(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\pi, t\ge 2\pi\\ 1, & \pi\le t<2\pi\end{cases}$$

(3) $y''+4y=\sin(t)-u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

(4) $y''+4y=\sin(t)+u_\pi\sin(t-\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

CAPíTULO 5

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Los métodos de solución descritos para resolver ecuaciones diferenciales de orden 2 funcionan para ordenes más grandes con las obvias modificaciones.

Ejemplo 76. Encontrar la solución general de

$$y^{(4)} + y = 0.$$

Sol. Se proponen soluciones del tipo $y = e^{rx}$ y se obtiene la ecuación característica

$$r^4 + 1 = 0$$

es decir $r = \sqrt[4]{-1}$ esto es, r tiene que ser una raíz cuarta compleja de -1. Recordemos que si $A \in \mathbb{C}$ escrito en forma trigonométrica como

$$A = |A|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

entonces sus raíces $n-$ésimas son

$$\omega_k = \sqrt[n]{|A|}(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Como $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, las raíces cuartas de -1 son

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\omega_1 &= \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\omega_2 &= \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\omega_3 &= \cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

entonces las soluciones fundamentales son

$$\begin{aligned}
y_0 &= e^{x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2}), \quad y_1 = e^{x/\sqrt{2}}\cos(x/\sqrt{2}) \\
y_2 &= e^{-x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2}), \quad y_3 = e^{-x/\sqrt{2}}\cos(x/\sqrt{2})
\end{aligned}$$

por lo que la solución general es

$$\boxed{y = c_0 e^{x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2}) + c_1 e^{x/\sqrt{2}}\cos(x/\sqrt{2}) + c_2 e^{-x/\sqrt{2}}\sin(x/\sqrt{2}) + c_3 e^{-x/\sqrt{2}}\cos(x/\sqrt{2})}$$

Ejemplo 77. Encontrar la solución general de

$$y^{(3)} - 4y^{(1)} = x + 3\cos(x) + e^{-2x}$$

Sol. Usaremos el método de coeficientes indeterminados. Primero solucionamos la ecuación homogénea

$$y^{(3)} - 4y^{(1)} = 0$$

que tiene ecuación característica

$$r^3 - 4r = 0$$

es decir

$$r(r^2 - 4) = 0$$

cuyas soluciones son $r = 0, r = \pm\sqrt{4} = \pm 2$; por tanto, la solución complementaria es

$$y_c = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}.$$

Ahora encontraremos una solución particular de la ecuación no homegénea: por superposición,

$$y^{(3)} - 4y^{(1)} = x \tag{45}$$

$$y^{(3)} - 4y^{(1)} = 3\cos(x) \tag{46}$$

$$y^{(3)} - 4y^{(1)} = e^{-2x} \tag{47}$$

Ecuación (45): se propone

$$y_1 = Ax + B$$

entonces $y^{(1)} = A$, $y^{(3)} = 0$; sustituyendo en (45) queda

$$-4A = x$$

lo cual es imposible, pues x es variable, no constante. Por lo multiplicamos por x nuestra proposición original

$$y_1 = Ax^2 + Bx$$

entonces $y_1^{(1)} = 2Ax + B$, $y_1^{(2)} = 2A$, $y_1^{(3)} = 0$; sustituyendo en (45) queda

$$-4(2Ax + B) = x$$

de donde $-8A = 1$, $-4B = 0$. Por lo que $A = -1/8$ y $B = 0$. Entonces

$$y_1 = -\frac{x^2}{8}. \tag{48}$$

Ecuacion (46): se propone

$$y_2 = A\cos(x) + B\sin(x).$$

$$y_2^{(1)} = -A\sin(x) + B\cos(x), \quad y_2^{(2)} = -A\cos(x) - B\sin(x)$$

$$y_2^{(3)} = A\sin(x) - B\cos(x).$$

Sustituyendo en (46):

$$A\sin(x) - B\cos(x) - 4(-A\sin(x) + B\cos(x)) = 3\cos(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$5A\sin(x) - 5B\cos(x) = 3\cos(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$A = 0, B = -3/5.$$

Por lo tanto

$$y_2 = -\frac{3}{5}\sin(x). \tag{49}$$

Ecuación (47): proponemos

$$y_3 = Ae^{-2x}.$$

$$y_3^{(1)} = -2Ae^{-2x}, \quad y_3^{(2)} = 4Ae^{-2x}, \quad y_3^{(3)} = -8Ae^{-2x}.$$

Sustituyendo en (47):

$$-8Ae^{-2x} - 4(-2)e^{-2x} = e^{-2x}$$

es decir, queda $0 = e^{-2x}$ lo cual es, de nuevo, una inconsistencia. Por lo que mejor proponemos

$$y_3 = Axe^{-2x}.$$

$$y_3^{(1)} = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x},$$

$$y_3^{(2)} = -2Ae^{-2x} - 2A(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = 4A(xe^{-2x} - e^{-2x})$$

$$y_3^{(3)} = 4A(e^{-2x} - 2xe^{-2x} + 2e^{-2x})$$

sustituyendo en (47):

$$4Ae^{-2x} - 8Axe^{-2x} + 8Ae^{-2x} - 4Ae^{-2x} + 8Axe^{-2x} = e^{-2x}$$

$\Leftrightarrow$

$$8Ae^{-2x} = e^{-2x}$$

$\Leftrightarrow$ $A = 1/8$. Por lo tanto

$$y_3 = \frac{1}{8}xe^{-2x}. \tag{50}$$

En conclusión, la solución general buscada es la solución complementaria más la suma de las soluciones particulares dadas por (48), (49) y (50).

$$\boxed{y = -\frac{x^2}{8} - \frac{3}{5}\sin(x) + \frac{1}{8}xe^{-2x} + c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x}}$$

Para usar el método de varicación de parámetros tenemos que modificar el wronskiano a orden n.

Definición 78. *Si $f_1, \ldots, f_n$ son funciones, el wronskiano de $f_1, \ldots f_n$ es*

$$W(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1^{(1)}(x) & \cdots & f_n^{(1)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Teorema 11 (Variación de parámetros). *Una solución particular de*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y^{(1)} + p_n(x)y = g(x)$$

es

$$y = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

donde $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ son soluciones de la homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y^{(1)} + p_n(x)y = 0$$

y además

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ 0 & y_2^{(1)}(x) & \cdots & y_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_2^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, \ldots, y_n)}, \quad c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 & \cdots & y_n(x) \\ y_1^{(1)}(x) & 0 & \cdots & y_n^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & g(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, \ldots, y_n)}$$

$$\ldots, c_n' = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & 0 \\ y_1^{(1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(1)}(x) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & g(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, \ldots, y_n)}$$

Podemos escribir las ecuaciones que definen a cada c_i como

$$c_i'(x) = g(x)\frac{W_i(y_1, \ldots, y_n)}{W(y_1, \ldots, y_n)}$$

Ejemplo 79. Encontrar la solución fundamental de

$$y^{(3)} - y^{(2)} - y^{(1)} + y = e^x$$

Sol. Primero resolvemos la homogénea:

$$y^{(3)} - y^{(2)} - y^{(1)} + y = 0$$

que tiene ecuación característica

$$r^3 - r^2 - r + 1 = 0.$$

Una obvia solución a ésta es $r = 1$, por lo $r - 1$ es factor del lado izquierdo de tal ecuación: $r^3 - r^2 - r + 1 = (r-1)q(r)$. Para encontrar $q(r)$ podemos hacer uso de la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{rrrrr} 1) & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ \hline \\ & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

entonces $q(r) = r^2 - 1$. Por lo que la ecuación característica es

$$(r-1)(r+1)(r-1) = 0$$

que tiene como raíz repetida a $r = 1$. Por lo que la solución complementaria es

$$y_c = a_1 e^x + a_2 x e^x + a_3 e^{-x}.$$

Nos resta encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea: por variación de parámetros;

$$c_i'(x) = g(x)\frac{W_i(e^x, xe^x, e^{-x}}{W(e^x, xe^x, e^{-x})}$$

donde

$$
\begin{aligned}
W(e^x, e^{-x}, xe^{-x}) &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} & & \\ e^x & e^x + xe^x & -e^{-x}e^x & e^x + e^x + xe^x & e^{-x} \end{vmatrix} \\
&= e^{2x}e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1+x & -1 \\ 12+x & 1 & \end{vmatrix} \\
&= e^x \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad 1F \times (-1) + 2F, 1F \times (-1) + 3F \\
&= e^x \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 4e^x.
\end{aligned}
$$

Mientras que

$$
\begin{aligned}
W_1(e^x, xe^x, e^{-x}) &= \begin{vmatrix} 0 & xe^x & e^{-x} \\ 0 & e^x + xe^x & -e^{-x} \\ 1 & 2e^x + xe^x & e^{-x} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} xe^x & e^{-x} \\ e^x + xe^x & -e^{-x} \end{vmatrix} \\
&= e^x e^{-x} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1+x & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -(2x+1);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_2(e^x, xe^x, e^{-x}) &= \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{-x} \\ e^x & 0 & -e^{-x} \\ e^x & 1 & e^{-x} \end{vmatrix} \\
&= e^x e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -(1-1) = -2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_3(e^x, xe^x, e^{-x}) &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & e^x + xe^x & 0 \\ e^x & 2e^x + xe^x & 1 \end{vmatrix} \\
&= e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= e^{2x}
\end{aligned}
$$

lo que implica que

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= \int g(x)\frac{W_1}{W}dx\\
&= -\int e^x\frac{2x+1}{4e^x}dx\\
&= -\frac{1}{4}\int (2x+1)dx\\
&= \frac{1}{4}(x^2+x)+k_1;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2(x) &= \int e^x\frac{W_2}{W}dx\\
&= \int \frac{2}{4e^x}dx\\
&= \frac{1}{2}\int e^{-x}dx\\
&= -\frac{1}{2}e^{-x}+k_2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_3(x) &= \int e^x\frac{W_3}{W}dx\\
&= \int e^x\frac{e^{2x}}{4e^x}dx\\
&= \frac{1}{4}\frac{e^{2x}}{2}+k_3\\
&= \frac{1}{8}e^{2x}+k_3.
\end{aligned}
$$

Por tanto, una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}(x^2+x)e^x - \frac{1}{2}e^{-x}xe^x + \frac{1}{8}e^{2x}e^{-x}$$

y la solución general es

$$\boxed{y(x) = y_p + y_c = -\frac{1}{4}(x^2+x)e^x - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}e^x + a_1e^x + a_2xe^x + a_3e^{-x}}$$

donde a_1, a_2, a_3 son constantes arbitrarias.

Tarea 16.

(1) *Usar coeficientes indeterminados para resolver.*
   (a) $y''' + 4y' = x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
   (b) $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3$
   (c) $y''' + y'' + y' + y = e^{-x} + 4x$
   (d) $y''' - y' = 2\sin(x)$

(2) *Usar variación de parámetros para determinar una solución particular de la ecuación diferencial dada.*
   (a) $y''' + y' = \tan(x)$, $0 < x < \pi/2$
   (b) $y''' - y = x$
   (c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$

CAPíTULO 6

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Supongamos que se quiere resolver, en variable t, la ecuación diferencial,

$$y^{(n)} = F(t, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}).$$

Una técnica es convertir ésta ecuación diferencial en un sistema de n ecuaciones diferenciales, definiendo nuevas funciones $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ como sigue:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= y'(t) \\ x_3(t) &= y''(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}'(t) &= x_n(t) \\ x_n'(t) &= F(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{aligned}$$

que es un caso particular de un sistema del tipo

$$x_i'(t) = F_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{51}$$

Definición 80. *Una solución del sistema* (51) *en un intervalo* (α, β)*, es un conjunto de funciones* $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ *derivables en* (α, β) *tales que al hacer* $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ *se satisface* (51).

La existencia y unicidad de las soluciones de (51) está garantizada por:

Teorema 12. *Si* $F_1, \ldots, F_n, \partial F_1/\partial x_1, \ldots, \partial F_n/\partial x_n$ *son continuas en una región* R *definida por*

$$\alpha < t < \beta, \quad , \alpha_1 < x_1 < \beta_1 \quad , \ldots, \alpha_n < x_n < \beta_n$$

y $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in R$ *fijo; entonces existe un intervalo* $t_0 - h < t < t_0 + h$ *en el que* (51) *tiene solución única*

$$x_1 = \phi_1, \ldots, x_n = \phi_n.$$

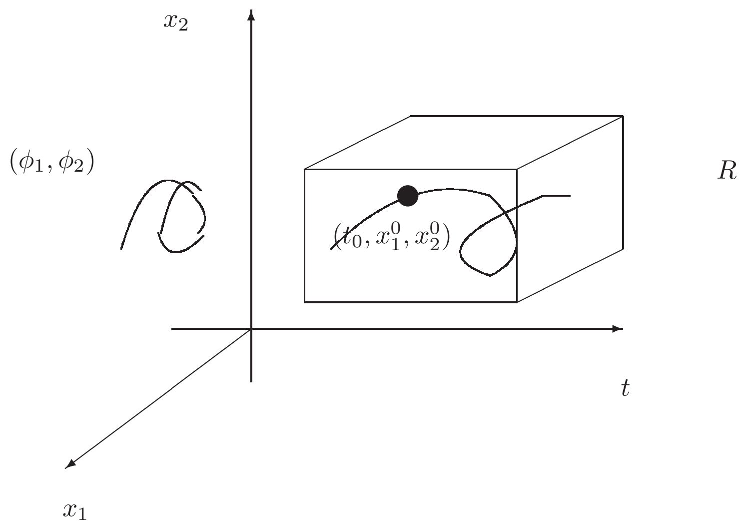


FIGURA 1. La caja R y la solución (ϕ_1, ϕ_2)

DEFINICIÓN 81. *Un sistema de ecuaciones de primer orden lineal es*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1' & = & p_{11}(t)x_1 & + & \cdots & + & p_{1n}(t)x_n & + & g_1(t) \\ x_2' & = & p_{21}(t)x_1 & + & \cdots & + & p_{2n}(t)x_n & + & g_2(t) \\ & \vdots & & & & & & & \\ x_n' & = & p_{n1}(t)x_1 & + & \cdots & + & p_{nn}(t)x_n & + & g_n(t) \end{array}$$

con $\alpha < t < \beta$.

Si cada $g_i(t) = 0$ el sistema se llama *homogéneo*, sino, el sistema se llama *no homogéneo*.

COROLARIO 2. *Si* p_{ij} *son continuas* $1 \leq i, j \leq n$ *en* $\alpha < t < \beta$ *entonces existe una solución única* $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ *que satisface*

$$x_1^0 = \phi_1(t_0), \ldots, x_n^0 = \phi_n(t_0)$$

para $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *y* $x_1^0, \ldots, x_n^0$ *preescritos.*

DEMOSTRACIÓN. Las funciones $F_i = p_{1i}x_1 + \cdots + p_{ni}x_n$ son continuas y además $\partial F_i / \partial x_j = p_{ij}$ continuas. Luego se corolario se sigue del teorema 12. $\square$

EJEMPLO 82. La ecuación diferencial

$$u'' + \frac{1}{2}u' + u = 0$$

se puede escribir como un sistema de ecuaciones haciendo los cambios:

$$x_1 = u$$
$$x_2 = u'$$

luego

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = u'' = -1/2\, u' - u = -\frac{1}{2}x_2 - x_1$$

es decir, la ecuación diferencial de orden 2 se convierte el el sistema

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = -x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

que es un sistema lineal homogéneo.

Tarea 17. *Pag. 358: 1-12.*

Antes de continuar necesitamos establecer las propiedades de funciones matriciales que se usarán para resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales lienales.

Definición 83. *Una función matricial es $A : I \to M(n, m)$ donde I es un intervalo y $M(n, m)$ es el conjunto de matrices $n \times m$:*

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nm}(t) \end{pmatrix}$$

y donde cada $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ es función.

En particular, si $X : I \to M_{n\times 1}$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

donde cada $x_i : I \to \mathbb{R}$.

Propiedad 6.

(1) *A es continua $\Leftrightarrow$ cada $a_{ij}(t)$ es continua.*
(2) *A es derivable $\Leftrightarrow$ cada $a_{ij}(t)$ es derivable.*
(3)
$$A' = \frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} a_{11}'(t) & \cdots & a_{1m}'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}'(t) & \cdots & a_{nm}'(t) \end{pmatrix}$$
(4)
$$\int_\alpha^\beta A\, dt = \begin{pmatrix} \int_\alpha^\beta a_{11}(t)dt & \cdots & \int_\alpha^\beta a_{1m}(t)dt \\ \vdots & & \vdots \\ \int_\alpha^\beta a_{n1}(t)dt & \cdots & \int_\alpha^\beta a_{nm}(t)dt \end{pmatrix}$$

Ejemplo 84. Si

$$A(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & t \\ 1 & \cos(t) \end{pmatrix}$$

entonces

$$A' = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 \\ 0 & -\sin(t) \end{pmatrix}$$

y además

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi A dt &= \begin{pmatrix} \int_0^\pi \sin(t)dt & \int_0^\pi t dt \\ \\ \int_0^\pi dt & \int_0^\pi \cos(t)dt \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos(t)|_0^\pi & \frac{t^2}{2}|_0^\pi \\ \\ t|_0^\pi & \sin(t)|_0^\pi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi^2}{2} \\ \pi & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Propiedad 7. *Si $A(t)$, $B(t)$ son funciones matriciales*

(1)

$$\frac{d}{dt}(A \pm B) = \frac{dA}{dt} \pm \frac{dB}{dt}$$

(2) *Si C es matriz constante,*

$$\frac{d}{dt}(CA) = C\frac{dA}{dt}$$

(3)

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}.$$

Nótese que el sistema lineal

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1' & = & p_{11}(t)x_1 & + & \cdots & + & p_{1n}(t)x_n & + & g_1(t) \\
x_2' & = & p_{21}(t)x_1 & + & \cdots & + & p_{2n}(t)x_n & + & g_2(t) \\
 & \vdots & & & & & & & \\
x_n' & = & p_{n1}(t)x_1 & + & \cdots & + & p_{nn}(t)x_n & + & g_n(t)
\end{array}$$

se puede escribir de forma matricial como

$$X' = P(t)X + G(t)$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

y que si el sistema es homogéneo se puede escribir como

$$X = P(t)X \tag{52}$$

Notación:

$$X_{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, X_{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$$

TEOREMA 13 (Superposición). *Si $X_{(1)}$ y $X_{(2)}$ son soluciones del sistema homogéneo* (52), *entonces $c_1X_{(1)} + c_2X_{(2)}$ es también solución, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis

$$\begin{aligned} X'_{(1)} &= P(t)X_{(1)} \\ X'_{(2)} &= P(t)X_{(2)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} c_1X'_{(1)} &= c_1P(t)X_{(1)} \\ c_2X'_{(2)} &= c_2P(t)X_{(2)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} c_1X'_{(1)} + c_2X'_{(2)} &= c_1P(t)X_{(1)} + c_2P(t)X_{(2)} \\ &= P(t)c_1X_{(1)} + P(t)c_2X_{(1)} \\ &= P(t)\big(c_1X_{(1)} + c_2X_{(1)}\big) \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 85. Considérese el sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X$$

entonces tal sistema tiene como una solución a

$$X_{(1)} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

pues

$$\begin{aligned} X'_{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} 3e^{3t} \\ &= \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 6e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 6e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo que

$$X'_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X_{(1)}.$$

También

$$X_{(2)} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

es otra solución, pues

$$X'_{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

y

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X_{(2)}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} \end{aligned}$$

es decir,

$$X'_{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X_{(2)}(t)$$

entonces para cualesquiera $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$c_1 X_{(1)} + c_2 X_{(2)}$$

es también solución.

Obsérvese que las columnas (renglones) de una matriz cuadrada A son linealmente independientes si y sólo si $|A| \neq 0$.

Definición 86. *Si*

$$X_{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, X_{(n)} = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

entonces el woronskiano de $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ *es*

$$W(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

Por lo que

$$X_{(1)}, \ldots, X_{(n)} \text{ son linealmente independientes } \Leftrightarrow W(X_{(1)},' \ldots, X_{(n)}) \neq 0.$$

Teorema 14. *Si* $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ *son soluciones linealmente independientes del sistema*

$$X' = P(t)\, X, \quad \alpha < t < \beta \tag{53}$$

entonces cualquier otra solución $\Phi(t)$ *tiene la forma*

$$\Phi(t) = c_1 X_{(1)} + \cdots + c_n X_{(n)} \tag{54}$$

para algunas constantes $c_1, \ldots, c_n$.

Demostración. Sea $t_0 \in (\alpha, \beta)$ fijo, y sea $\Phi(t)$ una solución arbitraria de (53). Pongamos

$$\xi_0 = \Phi(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Buscamos $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla (54). Sin embargo el sistema de ecuaciones lineal

$$\xi_0 = c_1 X_{(1)}(t_0) + \cdots + c_n X_{(n)}(t_0)$$

tiene soluciones en $c_1, \ldots, c_n$ pues el determinante de tal sistema es el wronskiano $W(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})(t_0) \neq 0$ por hipótesis. Tenemos entonces que $\Phi(t)$ y $c_1 X_{(1)} + \cdots + c_n X_{(n)}$ satisfacen la misma condición inicial:

$$\xi_0 = \Phi(t_0) \quad \wedge \quad \xi_0 = c_1 X_{(1)}(t_0) + \cdots + c_n X_{(n)}(t_0)$$

lo que implica, por el teorema de existencia y unicidad que tales soluciones deben de coincidir:

$$\phi(t) = c_1 X_{(1)} + \cdots + c_n X_{(n)}$$

$\square$

1. Sistemas lineales con coeficientes constantes

En el caso de sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes el esquema es el siguiente:

Problema: resolver el sistema

$$X' = AX$$

donde A es matriz constante.

Sol. Se propone

$$X = \xi e^{rt}$$

con $\xi \in \mathbb{R}^n$ vector columna constante. Sustituyendo tal propuesta en la ecuación diferencial

$$X' = \xi r e^{rt} = A\xi e^{rt}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= A\xi r e^{rt} - \xi r e^{rt} \\ &= (A\xi - \xi r)e^{rt} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= (A\xi - r\xi) \\ &= (A - rI_n)\xi \end{aligned}$$

donde I_n es la matriz identidad. Pero $(A - rI_n)\xi = 0$ para $\xi \neq 0 \Leftrightarrow |A - rI_n| = 0$.

Ejemplo 87. Hallar la solución general de

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X$$

Sol. Se propone

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{rt}$$

con $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$r \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{rt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{rt}$$

cancelando e^{rt} y despejando,

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{55}$$

lo cual ocurre si y sólo si (para ξ_1, ξ_2 no ambos cero),

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (1-r)^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - r = \pm 2 \\ &\Leftrightarrow 1 \mp 2 = r \\ &\Leftrightarrow r = 3 \vee r = -1. \end{aligned}$$

Si $r = 3$, sustituyendo en (55) se obtiene

$$0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{rcrcl} -2\xi_1 & + & \xi_2 & = & 0 \\ 4\xi_1 & - & 2\xi_2 & = & 0 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\xi_2 = 2\xi_1$$

dando el valor $\xi_1 = 1$ se obtiene $\xi_2 = 2$ y se obtiene

$$\xi_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Similarmente si $r = -1$ en (55):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{rcrcl} 2\xi_1 & + & \xi_2 & = & 0 \\ 4\xi_1 & + & 2\xi_2 & = & 0 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$

$$2\xi_1 + \xi_2 = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\xi_2 = -2\xi_1$$

Si ponemos $\xi = 1$, entonces $\xi_2 = -2$. Hemos obtenido

$$\xi_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y a su vez, obtenemos,

$$X_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad X_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

se puede mostrar que $W(X_{(1)}, X_{(2)}) \neq 0$, por lo que la solución general es

$$\boxed{X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}}.$$

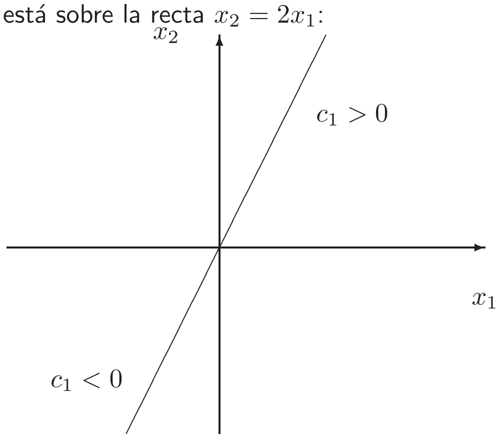
Si en la solución anterior se pone $c_2 = 0$ se obtienen las funciones coordenadas

$$x_1 = c_1 e^{3t} \quad x_2 = 2c_1 e^{3t}$$

lo que implica

$$x_2 = 2x_1$$

es decir, tal solución está sobre la recta $x_2 = 2x_1$:



Si $c_1 > 0$ entonces la solución está en el primer cuadrante y si $c_2 < 0$ entonces la solución está en el tercer cuadrante.

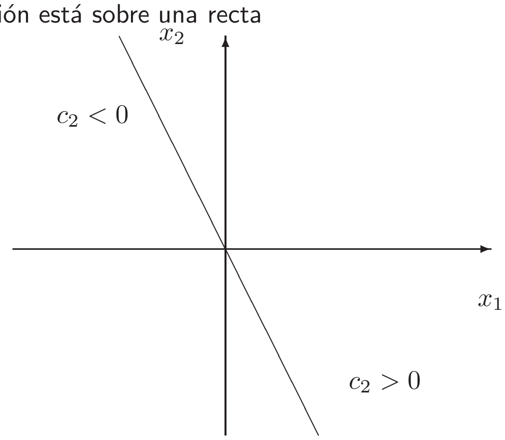
De forma similar, si $c_1 = 0$ se obtienen

$$x_1 = c_2 e^{-t} \quad x_2 = -2e^{-t}$$

de donde se sigue que

$$x_2 = -2x_2$$

y de nuevo las solución está sobre una recta



Si $c_2 < 0$ la solución está ahora en el segundo cuadrante y si $c_2 > 0$ entonces en el cuarto.

Nótese también que

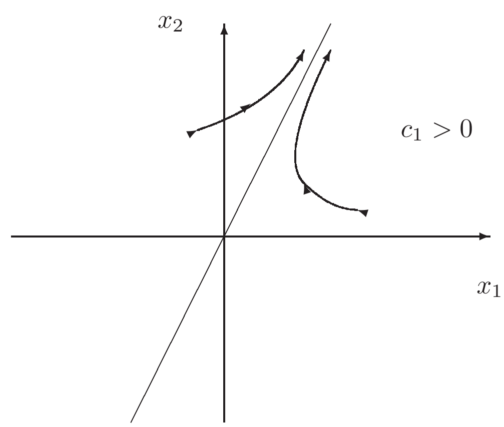
$$||X(t) - c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}|| = ||c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}||$$

por lo que

$$\lim_{t\to\infty} ||X(t) - c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}|| = 0$$

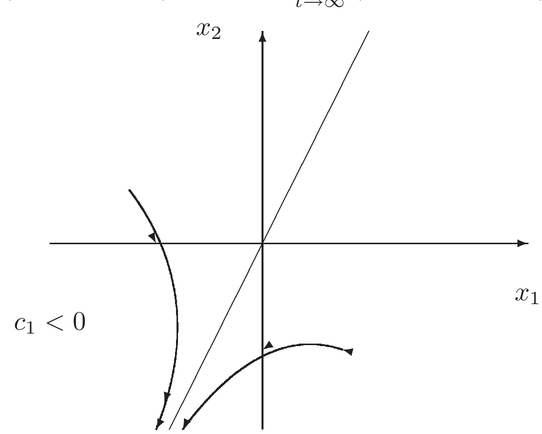
es decir, las soluciones (cualquiera) se acerca a la recta $x_2 = 2x_1$; pero se alejan del origen, pues si $c_1 > 0$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} \left(c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}\right) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} \left(2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t}\right) = \infty$$



y si $c_1 < 0$:

$$\lim_{t\to\infty} \left(c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}\right) = -\infty, \quad \lim_{t\to\infty} \left(2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t}\right) = -\infty$$

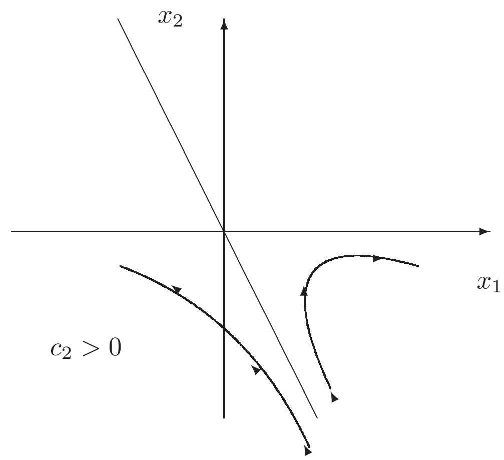


donde las flechas apuntan hacia la dirección detl tiempo $t > 0$. Similarmente

$$\lim_{t\to-\infty} ||X(t) - c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}|| = 0$$

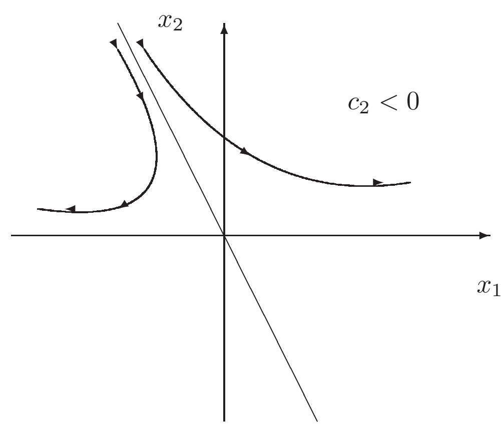
y si $c_2 > 0$:

$$\lim_{t\to-\infty} \underbrace{\left(c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}\right)}_{x_1} = \infty, \quad \lim_{t\to-\infty} \underbrace{\left(2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t}\right)}_{x_2} = -\infty$$

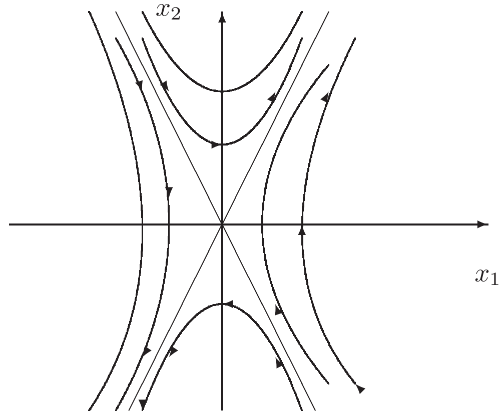


y si $c_2 < 0$:

$$\lim_{t\to-\infty} \underbrace{\left(c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}\right)}_{x_1} = -\infty, \quad \lim_{t\to-\infty} \underbrace{\left(2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t}\right)}_{x_2} = \infty$$

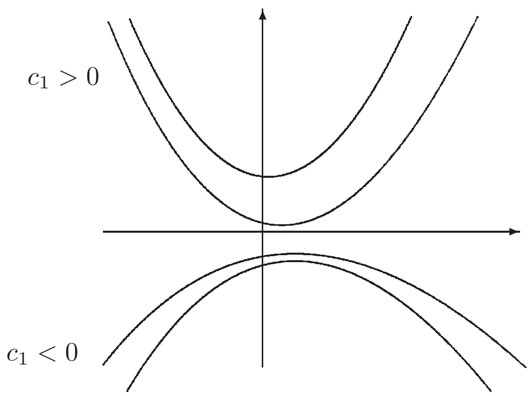


En resumen:



También es posible graficar $x_i(t)$ contra t:

$$x_1 = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$$



Similarmente se obtiene la gráfica de x_2. Toda la información sobre las gráficas se puede visualizar en el espacio euclidiano (t, x_1, x_2) como se ve en la figura 2 para $X(t)$ con $c_1 = 1$ y $c_2 = -2$.

Definición 88. *Sea A una matriz $n \times n$, I_n la matriz identidad $n \times n$:*

(1) *Un número $r \in \mathbb{C}$ tal que*

$$|A - rI_n| = 0$$

se llama valor propio.

(2) *Un vector columna $v \in \mathbb{C}^n$ tal que*

$$Av = rv$$

se llama vector propio.

Para resolver los sitemas de ecuaciones con coefcientes constantes necesitamos calcular valores y vectores propios. A veces, de la forma de la matriz se puede predeterminar la forma de los valores propios.

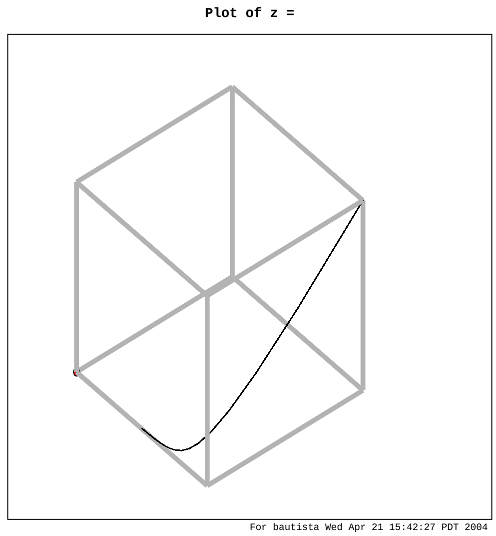


FIGURA 2. Gráfica de una solución $(t, X(t))$ en $\mathbb{R}^3$

DEFINICIÓN 89. *Una matriz con entradas complejas se llama hermitiana si*

$$A = (\bar{A})^t$$

donde $(\bar{A})^t$ *denota a la matriz conjugada transpuesta de* A*. La matriz* A *se llama simétrica si*

$$A = A^t$$

EJEMPLO 90. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & 1-i \\ -i & -1 & 2+i \\ 1+i & 2-i & 5 \end{pmatrix}$$

es hermitiana pues

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -i & 1+i \\ i & -1 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 5 \end{pmatrix}$$

y entonces su transpuesta es

$$(\bar{A})^t = \begin{pmatrix} 3 & i & 1-i \\ -i & -1 & 2+i \\ 1+i & 2-i & 5 \end{pmatrix} = A$$

EJEMPLO 91. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

es simétrica y hermitiana.

Luego entonces, si A es una matriz real simétrica entonces es hermitiana.

TEOREMA 15. *Si A es una matriz hermitiana entonces sus valores propios son todos raíces reales.*

EJEMPLO 92. Encontrar la solución general de

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} X$$

Sol. Se propone $X = \xi e^{rt}$. Luego hay que resolver

$$|A - rI| = 0, \quad (A - rI)\xi = 0, \tag{56}$$

es decir

$$\begin{vmatrix} -3 - r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 - r \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} -3 - r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0$$

Como la matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

es simétrica real y así hermitiana todas los valores propios r deben de ser reales. Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (3 + r)(2 + r) - 2 \\ &= 6 + 3r + 2r + r^2 - 2 \\ &= r^2 + 5r + 4 \end{aligned}$$

de donde $r = -1 \vee r = -4$.

Sustituyendo $r = -1$ en la matriz característica de (56),

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = 0$$

Resolvemos tal sistema por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto tenemos que resolver el sistema

$$-2x_1 + \sqrt{2}\xi_2 = 0$$

de forma no trivial. Una solución es

$$\xi_2 = \sqrt{2}, \xi_1 = 1.$$

De donde obtenemos una solución

$$X_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} \quad .$$

Si ahora ponemos $r = -4$ en la matriz característica de (56), de forma similar al anterior obtenemos

$$X_{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

Además como el wronskiano de $X_{(1)}$ y $X_{(2)}$ es

$$\begin{aligned} W(X_{(1)}, X_{(2)}) &= \begin{vmatrix} e^{-t} & -\sqrt{2}e^{-4t} \\ \sqrt{2}e^{-t} & e^{-4t} \end{vmatrix} \\ &= e^{-t}e^{-4t} \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3e^{-5t} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

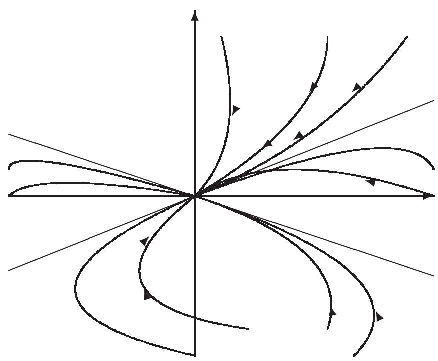
entonces $X_{(1)}, X_{(2)}$ son linealmente independientes. Por lo que la solución general es

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

Obsérvese que en el ejemplo anterior

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$$

por lo que las soluciones se comportan en el plano x_1x_2 como



Ejemplo 93. Encontrar la solución general de

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Sol. La matriz es simétrica, por lo que sus valores propios son reales. Se propone

$$X = \xi e^{rt}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{pmatrix} -r & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{57}$$

luego,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}-r & 1 & 1\\ 1 & -r & 1\\ 1 & 1 & -r\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}0 & 1-r^2 & r+1\\ 1 & -r & 1\\ 0 & 1-r & -r-1\end{vmatrix}\\ &= -\begin{vmatrix}1-r^2 & r+1\\ r+1 & -(r+1)\end{vmatrix}\\ &= -(r+1)(r+1)\begin{vmatrix}1-r & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ &= -(r+1)^2(r-2)\end{aligned}$$

por lo tanto los valores propios son

$$r=-1, r=2$$

nótese que $r=-1$ es de multiplicidad 2, es decir es una raíz repetida. *Para raíces repetidas deben de tomarse tantos vectores propios linealmente independientes como la multiplicidad*. Por ejemplo para $r=-1$ sustituyendo en la matriz característica de (57),

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=0$$

resolvemos por Gauss

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

es decir tenemos la ecuación a resolver no trivialmente

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$$

(tiene dos variables libres): una solución es

$$\xi_{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

y otra linealmente independiente de la anterior es

$$\xi_{(2)}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

(son linealmente independientes porque $a\xi_{(1)}+b\xi_{(2)}=0 \Leftrightarrow a=b=0$). Tenemos así dos soluciones linealmente independientes:

$$X_{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}e^{-t},\quad X_{(2)}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}e^{-t}$$

Si $r=2$ en la ecuación característica de (57):

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=0$$

pero

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema a resolver no trivialmente

$$\begin{array}{rcrcrcl} \xi_1 & + & \xi_2 & - & 2\xi_3 & = & 0 \\ & - & \xi_2 & + & \xi_3 & = & 0 \end{array}$$

una solución es

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que produce la tercera solución (fundamental)

$$X_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Tarea 18. *Encontrar la solución general del problema.*

(1)

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X$$

(2)

$$X' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

(3)

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X$$

(4)

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X$$

(5)

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(6)

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Valores propios en $\mathbb{C}$

Los valores propios complejos de matrices reales siempre aparecen aparejados por conjugación.

PROPIEDAD 8. *Si A es matriz real con valor propio $r \in \mathbb{C}$ correspondiente al vector propio $v \in \mathbb{C}^n$ entonces $\bar{r}$ es valor propio correspondiente al vector propio $\bar{v}$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$|A - rI_n| = 0$$

conjugando a ambos lados de la ecuación:

$$\overline{|A - rI_n|} = \bar{0} = 0$$

pero el lado izquierdo es $|\bar{A} - \bar{r}\bar{I}_n|$. Siendo que A, I_n son reales $\bar{A} = A$, $\bar{I}_n = I_n$. Obtenemos

$$|A - \bar{r}I_n| = 0.$$

lo que indica que $\bar{r}$ es valor propio.

Además,

$$Av = rv$$

implica que

$$\bar{A}\bar{v} = \bar{r}\bar{v}$$

es decir

$$A\bar{v} = \bar{r}\bar{v}$$

lo que significa que $\bar{v}$ es vector propio. $\square$

Supongamos que el sistema

$$X' = AX$$

con A matriz real resulta en $r \in \mathbb{C}$ valor propio de A. Entonces $\bar{r} \in \mathbb{C}$ es también valor propio. Así, si $X_{(1)} = \xi e^{rt}$ es solución entonces también lo es $X_{(2)} = \overline{\xi} e^{\bar{r}t}$. Pero tanto $X_{(1)}$, como $X_{(2)}$ son soluciones complejas. Tales se pueden reemplazar por soluciones reales de la siguiente forma.

PROPIEDAD 9. *Si $r = \lambda + i\mu$, $\xi = a + ib$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}^n$ entonces*

$$X_{(1)} = \underbrace{e^{\lambda t}\left(a\cos(\mu t) - b\sin(\mu t)\right)}_{u(t)} + i\,\underbrace{e^{\lambda t}(a\sin(\mu t) + b\cos(\mu t))}_{v(t)}$$

siendo

$$u(t) = e^{\lambda t}\left(a\cos(\mu t) - b\sin(\mu t)\right), \quad v(t) = e^{\lambda t}(a\sin(\mu t) + b\cos(\mu t))$$

soluciones reales que pueden reemplazar a $X_{(1)}$ y a $X_{(2)}$, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= (a + ib)e^{(\lambda + i\mu)t} \\ &= (a + ib)e^{\lambda t}e^{i\mu t} \\ &= e^{\lambda t}(a + ib)(\cos(\mu t) + i\sin(\mu t)), \text{ por la identidad de Euler,} \\ &= e^{\lambda t}\Big(a\cos(\mu t) - b\sin(\mu t) + i\Big(a\sin(\mu t) + b\cos(\mu t)\Big)\Big) \end{aligned}$$

Similarmente

$$X_{(2)} = e^{\lambda t}\Big(a\cos(\mu t) - b\sin(\mu t) + i\Big(a\cos(\mu t) + b\sin(\mu t)\Big)\Big)$$

luego, por el principio de superposición $(1/2)(X_{(1)}+X_{(2)})$ es también solución, pero

$$\frac{1}{2}\left(X_{(1)} + X_{(2)}\right) = e^{\lambda t}\Big(a\cos(\mu t) - b\sin(\mu t)\Big)$$

de donde se sigue que

$$u(t) = e^{\lambda t}\Big(a\cos(\mu t) - b\sin(\mu t)\Big)$$

es solución.

Similarmente $(1/2i)(X_{(1)} - X_{(2)})$ es también solución, pero

$$\frac{1}{2i}(X_{(1)} + X_{(2)}) = e^{\lambda t}\Big(a\sin(\mu t) + b\sin(\mu t)\Big)$$

de donde

$$v(t) = e^{\lambda t}\Big(a\sin(\mu t) + b\sin(\mu t)\Big)$$

es solución. □

Aún más, se puede probar (tarea) que el wronskiano $W(u(t), v(t)) \neq 0$ y entonces son soluciones fundamentales reales que pueden reemplazar a las correspondientes soluciones complejas.

Por ejemplo: si $r_1 = \lambda + i\mu$ y $r_2 = \lambda - i\mu$ con $r_3, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ son raíces diferentes, entonces la solución general es:

$$X(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t) + c_3 \xi_{(1)} e^{r_3 t} + \cdots c_n \xi_{(n)} e^{r_n t}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes reales arbitrarias.

Ejemplo 94. Encontrar un conjunto fundamental de soluciones de *valores reales* para el sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} X$$

Sol. Se propone $X = \xi e^{rt}$. Entonces tenemos ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} = 0$$

y donde ξ es un correspondiente vector propio que satisface

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} &= -(1-r)(3+r) + 5 \\ &= -3 - r + 3r + r^2 + 5 \\ &= r^2 + 2r + 2 \end{aligned}$$

de donde

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} -1 + i \\ -1 - i. \end{cases}$$

Sea $C(r)$ la matriz característica

$$C(r) = \begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{pmatrix}.$$

Caso $r = 1+i$: tenemos que resolver el sistema $C(1+i)\xi = 0$, i.e,

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual hacemos por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \overset{F_1\times(2+i)}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -2-i \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -2-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir, tenemos que resolver no trivialmente la ecuación

$$5\xi_1 - (2+i)\xi_2 = 0,$$

por ejemplo si $\xi_1 = 1$ entonces $\xi_2 = \frac{5}{2+i} = 2-i$:

$$\therefore \xi_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

Caso $r = -1-i$: tenemos $C(1-i)\xi = 0$, i.e.,

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y de nuevo, según Gauss,

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -(2-i) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -(2-i) \\ 5 & -(2-i) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -(2-i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$5\xi_1 = (2-i)\xi_2$$

luego si $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \frac{5}{2-i} = 2+i$. Por tanto

$$\xi_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

y entonces un conjunto fundamental de soluciones es

$$X_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}, \quad X_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$$

pero estas son complejas. Para obtener reales ponemos:

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) e^{-t}(\cos(t) + i\sin(t)) \\ &= e^{-t} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(t) + i \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(t) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

entonces las *soluciones reales* son

$$\boxed{u(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t) \end{pmatrix}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\sin(t) \\ 2e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}}$$

que son linealmente independientes (fundamentales), pues

$$W(u,v) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t}\sin(t) \\ e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)) & e^{-t}(2\sin(t) - \cos(t)) \end{vmatrix} = -e^{-2t} \neq 0.$$

Así, la solución general es

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t}\sin(t) \\ 2e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}$$

$\square$

EJEMPLO 95. Un circuito eléctrico está descrito por

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

donde I es la corriente que pasa por la inductancia y V es la caída del voltaje a través del capacitor. Suponga que en $t = 0$ la corriente es de 1 ampere y la caída del voltaje es de 2 volts. Encontrar $I(t)$ y $V(t)$.

SOL. Se propone

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \xi e^{rt}.$$

Tenemos que resolver

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -1-r & -1 \\ 2 & -1-r \end{vmatrix} = (r+1)^2 + 2 = R^2 + 2r + 3 = 0$$

de donde

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{2}i \\ -1 - \sqrt{2}i \end{cases}$$

y se obtienen los eigenvectores

$$\xi_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix}, \quad \xi_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} X_{(1)}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) e^{-t}(\cos(\sqrt{2}t) + i\sin(\sqrt{2}t)) \\ &= e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + ie^{-t}\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mientras que $X_{(2)}(t)$ es la conjugada a $X_{(1)}(t)$. Luego las soluciones reales que reemplazan a éstas son

$$u(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}, \quad v(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

por lo que, la solución general es

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

pero como se tienen las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(0) \\ V(0) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y entonces $c_1 = 1$ y $c_2 = -2/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$;

$$\therefore \begin{cases} I(t) = e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}e^{-t}\sin(\sqrt{2}t) \\ V(t) = \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + 2\cos(\sqrt{2}t) \end{cases}$$

$\square$

Tarea 19.

(1) *Encontrar la solución general del sistema de ecuaciones dado, en términos de valores reales únicamente.*

(a)
$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X$$

(b)
$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X$$

(c)
$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ 9/5 & -1 \end{pmatrix} X$$

(2) *Resolver*

(a)
$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bibliografía

[1] William E. Boyce y Richard C. DiPrima, Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera, 4ta ed. Limusa, México, 1998.

[2] Nielsen, Michael A. Nielsen y Isaac L. Chuang, Quantum Information and Quantum Information, Cambridge Press, Cambridge, 2001.

[3] W. Schelter, *Maxima* A computer algebraic system, `http://maxima.sourceforge.net`