Contenido

Notas de Álgebra Lineal

César Bautista Ramos

Fac. Ciencias de la Computación, BUAP

CAPíTULO 1

$\mathbb{R}^2$

1. Geometría de $\mathbb{R}^2$

1.1. Operaciones.

Definición 1.

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

Es decir $\mathbb{R}^2$ consta de las parejas ordenadas de números reales. Este conjunto será uno de los primeros ejemplos de lo que llamaremos *espacio vectorial*.

Los elementos de $\mathbb{R}^2$ pueden interpretarse como elementos de un plano: el llamado *plano cartesiano real*. Es decir, un elemento (a,b) de $\mathbb{R}^2$ puede verse como un punto del plano cartesiano, que se acostumbra dibujar acompanado de una flecha con inicio en el elemento $(0,0)$, llamado *origen*, y punta en (a,b):

Definición 2. *Si* $\mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *entonces* a *se llama* **primera coordenada** *de* $\mathbf{v}$ *o* **absisa***, mientras que* b *se llama* **segunda coordenada** *ó* **ordenada**.

A los elementos (a,b) les llamaremos *vectores*, mientras que a los números $\lambda \in \mathbb{R}$ les llamaremos *escalares*.

En $\mathbb{R}^2$ sólo consideraremos las siguientes operaciones:

Definición 3.

(1) **Suma de vectores:** $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$*;*

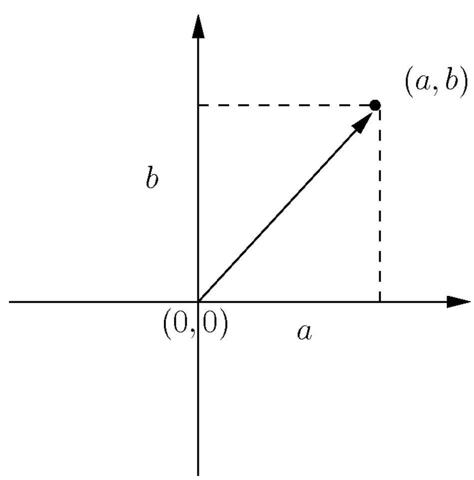


Figure 1. El vector (a,b).

(2) **Producto de un escalar por un vector:** *sea* $\lambda \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$$

Es decir, la suma de vectores es coordenada a coordenada, y el producto por escalares es también, coordenada a coordenada.

Ejemplo 4.

$$(1,2) + (-1,3) = (1 + (-1), 2 + 3) = (0,5) \tag{1}$$
$$(0,0) + (2,3) = (0 + 2, 0 + 3) = (2,3) \tag{2}$$
$$(-1,2) + (1,-2) = (-1 + 1, 2 + (-2)) = (0,0) \tag{3}$$
$$(1,0) + (0,1) = (1 + 0, 0 + 1) = (1,1) \tag{4}$$
$$(a,0) + (0,b) = (a + 0, 0 + b) = (a,b) \tag{5}$$

Ejemplo 5.

$$3(1,2) = (3 \cdot 1, 3 \cdot 2) \tag{6}$$
$$(-1)(3,-2) = (-3,2) \tag{7}$$
$$a(1,0) = (a,0) \tag{8}$$
$$b(0,1) = (0,b) \tag{9}$$
$$0(a,b) = (0a, 0b) = (0,0) \tag{10}$$

Ejemplo 6. También

$$\begin{aligned} a(1,0) + b(0,1) &= (a,0) + (0,b) \\ &= (a + 0, 0 + b) \\ &= (a,b) \end{aligned}$$

Tarea 1.

(1) *Encuéntrese las sumas de los vectores indicados y márquese en el plano los vectores sumandos, así como el vector suma:*
   (a) $(-1,-2) + (-3,4)$
   (b) $(3,2) + (-1,-3) + (-2,1)$
   (c) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{5}\right)$
   (d) $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

(2) *Compruébese que si* $\mathbf{u} = (-1,2)$, $\mathbf{v} = (3,5)$ *entonces* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. *Demuestre que esta propiedad conmutativa es cierta para cualquier pareja de vectores* $\mathbf{u} = (a,b)$ *y* $\mathbf{v} = (c,d)$.

(3) *Demuestre que si* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *son vectores arbitrarios en* $\mathbb{R}^2$ *entonces se cumple*

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

(4) *Resuélvase las ecuaciones*
   (a) $(3,1) + (x,y) = (2,3)$
   (b) $(a,1) + (x,y) = (-3,b)$
   (c) $(a,b) + (x,y) = (c,d)$
   (d) $(x,y) + (a,b) = (0,0)$

(5) *Encuétrese un número real* λ *tal que*

$$\lambda(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

(6) *Resuélvase la ecuación*

$$x(3,1)+y(2,4)=(-3,2)$$

(7) *¿Tiene solución la ecuación siguiente?*

$$x(6,3)+y(2,4)=(1,1)$$

2. Maxima

Podemos ayudarnos del paquete *Maxima* que es una pieza de software "matemático" que se empezó a desarrollar en los años 60 y que ahora se distribuye bajo licencia GNU. Se puede conseguir en

`http://maxima.sf.net`

Maxima incluye un lenguaje de programación que tiene su propia sintaxis. Por ejemplo, en *Maxima* los vectores se declaran como listas encerradas por cochetes. Así, el vector $(1,3)$ se declara como

Maxima

```
[1,3];
```

$$[1,3]$$

Se pueden sumar vectores:

Maxima

```
[3,4]+[5,7];
```

$$[8,11]$$

incluso en abstracto:

Maxima

```
[a,0]+[0,b];
```

$$[a,b]$$

La multiplicación por escalares se debe indicar con un asterisco:

Maxima

```
2*[-3,9];
```

$$[-6,18]$$

Maxima

```
a*[1,0]+b*[0,1];
```

$$[a,b]$$

También *Maxima* se puede usar para dibujar vectores, usando el paquete llamado `draw`, que debe cargarse primero:

Maxima

```
load(draw);
```

```
/opt/local/share/maxima/5.18.1/share/draw/draw.lisp
```

Para hacer dibujos planos se usa la función `draw2d`. Primero queremos dibujar el par de ejes coordenados x, y en x de -10 a 10, y en y de -8 a 8.

Maxima draw

```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-10,10],yrange=[-8,8]);
```

```
[gr2d()]
```

y no se despliega nada. Para forzar tal despliegue dibujamos el origen $(0,0)$ con la intrucción `points`:

Maxima draw

```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-10,10],yrange=[-8,8],
points([[0,0]]));
```

$$\text{draw2d}\left(\text{xaxis} = \textbf{true}, \text{yaxis} = \textbf{true}, \text{xrange} = [-10, 10], \text{yrange} = [-8, 8], \text{points}\left([[0, 0]]\right)\right)$$

Nótese que por ausencia, los ejes se dibujan punteados. Se pueden cambiar a líneas sólidas con el atributo `xaxis_type`:

Maxima — draw

```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-10,10],yrange=[-8,8],
xaxis_type=solid,yaxis_type=solid,
points([[0,0]]));
```

```
draw2d(xaxis = true, yaxis = true, xrange = [- 10, 10],
   yrange = [- 8, 8], xaxis_type = solid, yaxis_type = solid,
points([[0, 0]]))
```

Ahora dibujamos un vector *anclado* en el origen $(0, 0)$ con `vector`:

Maxima

```
draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-10,10],yrange=[-8,8],
xaxis_type=solid,yaxis_type=solid,
vector([0,0],[-2,3]));
```

```
draw2d(xaxis = true, yaxis = true, xrange = [- 10, 10],
yrange = [- 8, 8], xaxis_type = solid, yaxis_type = solid,
vector([0, 0], [- 2, 3]))
```

puede notarse que la punta de la flecha es exageradamente grande. Se puede controlar su tamaño con `head_length`:

Maxima — draw

```
  draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-10,10],yrange=[-8,8],
xaxis_type=solid,yaxis_type=solid,head_length=.4,
vector([0,0],[-2,3]));
```

```
draw2d(xaxis = true, yaxis = true, xrange = [- 10, 10],
yrange = [- 8, 8], xaxis_type = solid, yaxis_type = solid, head_length = 0.4,
vector([0, 0], [- 2, 3]))
```

Nótese que si se ancla el vector en $(0, -1)$ se obtiene:

Maxima — draw

```
  draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xrange=[-10,10],yrange=[-8,8],
xaxis_type=solid,yaxis_type=solid,head_length=.4,
vector([0,-1],[-2,3]));
```

```
draw2d(xaxis = true, yaxis = true, xrange = [- 10, 10],
yrange = [- 8, 8], xaxis_type = solid, yaxis_type = solid, head_length = 0.4,
vector([0, - 1], [- 2, 3]))
```

Todo lo anterior se puede resumir en un sólo procedimiento o función:

Maxima draw

```
  dvector(v):=draw2d(xaxis = true, yaxis = true, xrange = [- 10, 10],
yrange = [- 8, 8], xaxis_type = solid, yaxis_type = solid,
 head_length = 0.4, vector([0, 0], v));
```

Nótese que el constructor `:=` se usa para definir funciones y que el argumento tiene que ser un vector en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo:

Maxima draw

```
  dvector([-8,9]);
```

```
dvector([- 8, 9])
```

La siguiente función suma los vectores **v** con **w**, dibuja en rojo tal suma, mientras que dibuja en negro los vectores sumandos:

Maxima draw

```
  dsuma(v,w):=draw2d(xaxis = true, yaxis = true, xrange = [- 10, 10],
yrange = [- 11, 11], xaxis_type = solid, yaxis_type = solid,
 head_length = 0.4,
vector([0, 0], v),vector([0,0],w),color=red,vector([0,0],v+w));
```

2.1. Interpretación geométrica de la adición. De geometría euclidiana:

Definición 7.

(1) *Un* **cuadrilátero** *es una figura geométrica cerrada en el plano formada por cuatro segmentos de rectas.*
(2) *Un* **paralelogramo** *es un cuadrilétro con sus lados paralelos dos a dos.*

Ejemplo 8. En la Figura 2 aparecen cuadriláteros

Ejemplo 9. En la Figura 3 aparece un paralelogramo

Las siguientes dos propiedades las aceptaremos sin demostración.

Propiedad 1. *Si las diagonales de un cuadrilátero se intersectan en su punto medio entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.*

Propiedad 2. *Si $P_1 = (x_1, x_2)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, entonces el punto medio del segmento que une a P_1 con P_2 es*

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Teorema 1. *Sean $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$ elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{s} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{0} = (0, 0)$. Entonces el cuadrilátero* **0usv** *es un paralelogramo.*

Demostración. Por definición $\mathbf{s} = (a + c, b + d)$ y $\mathbf{0} = (0, 0)$. Entonces el punto medio de la diagonal que une a $\mathbf{0}$ con $\mathbf{u}$ es

$$M_1 = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$

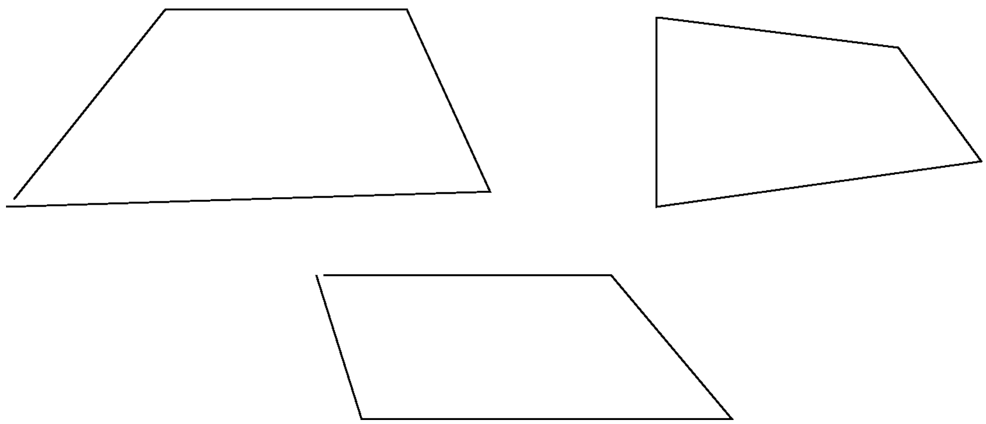


Figure 2. Ejemplos de cuadriláteros

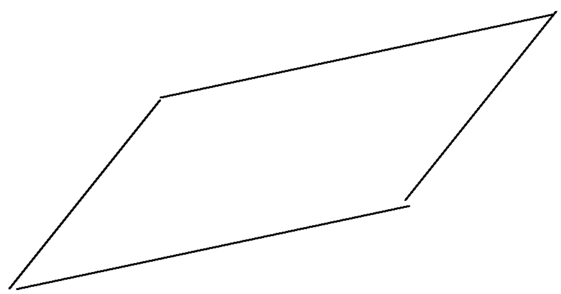


Figure 3. Ejemplo de paralelogramo

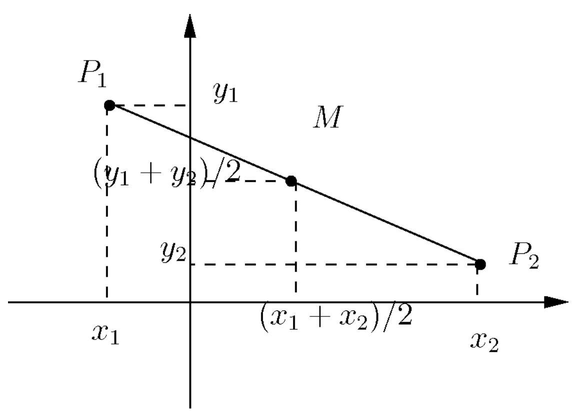


Figure 4. Punto medio

y el punto medio de la diagonal que une a $\mathbf{u} = (a, b)$ con $\mathbf{v} = (c, d)$ es

$$M_2 = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$

Por lo que

$$M_1 = M_2$$

es decir, el cuadrilátero $\mathbf{0usv}$ es tal que sus diagonales se intersectan en su punto medio. Luego $\mathbf{0usv}$ es un paralelogramo. □

Tarea 2. *Modifique el código anterior para definir una función que acepte:*

- **entrada:** *dos vectores* $\mathbf{v}, \mathbf{w}$*;*
- **salida:** *un dibujo de:*
  1. *la suma de los vectores de entrada, en verde;*
  2. *el vector suma, en azul*
  3. *el paralelogramo que forman los anteriores.*

Sugerencia: Visite `http://www.telefonica.net/web2/biomates/maxima/gpdraw/`

3. Interpretación geométrica del producto por escalares

Consideremos el vector $\mathbf{v} = (-1, 3)$:

Maxima — draw

```
v:[-1,3];
```

$[-1, 3]$

Consideremos el siguiente procedimento en *Maxima* que hace el producto del escalar λ por el vector $\mathbf{v}$. De hecho dibuja en negro el vector $\mathbf{v}$ y en rojo el producto resultante de $\lambda\mathbf{v}$.

Maxima — draw

```
  dProdXEsca(lambda,v):=draw2d(xaxis = true, yaxis = true,
xrange = [- 10, 10],
yrange = [- 11, 11], xaxis_type = solid, yaxis_type = solid,
 head_length = 0.4,
vector([0, 0], v),color=red,vector([0,0],lambda*v));
```

```
dProdXEsca(lambda, v) := draw2d(xaxis = true, yaxis = true,
xrange = [- 10, 10], yrange = [- 11, 11], xaxis_type = solid,
yaxis_type = solid, head_length = 0.4, vector([0, 0], v),
color = red, vector([0, 0], lambda v))
```

Podemos observar que para el producto por escalares $\lambda(a, b)$ hay varias posibilidades, dependiendo del escalar λ. Si $\lambda > 1$ entonces el vector $\lambda(a, b)$ es más largo que (a, b) pero tiene la misma dirección:

mientras que para $0 < \lambda < 1$ el vector $\lambda(a, b)$ se reduce:

y finalmente si $\lambda < 0$ entonces el vector original cambia de dirección:

TAREA 3. *Dibujar los siguientes vectores en el plano:* $(-2, -1), (1, 3), (3, 1)$, $(2, -4), (4, 2)$.

TAREA 4. *Encontrar todos los valores posibles de las x_i's tales que*

(1) $2(x_1, x_2) - (4, 7) = (-2, 11)$
(2) $4(x_1, x_2) + 2(x_1, 3) = (-6, 18)$

DEFINICIÓN 10. *Si* $\mathbf{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *se define*

$$-\mathbf{u} = (-a, -b)$$

PROPIEDAD 3.

$$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $\mathbf{u} = (a, b)$ entonces

$$\begin{aligned} (-1)\mathbf{u} &= ((-1)a, (-1)b), && \text{por def. de producto por escalar} \\ &= (-a, -b) \\ &= -\mathbf{u}, && \text{por definición.} \end{aligned}$$

$\square$

Lo anterior significa que $-\mathbf{u}$ es un vector con sentido opuesto a $\mathbf{u}$:

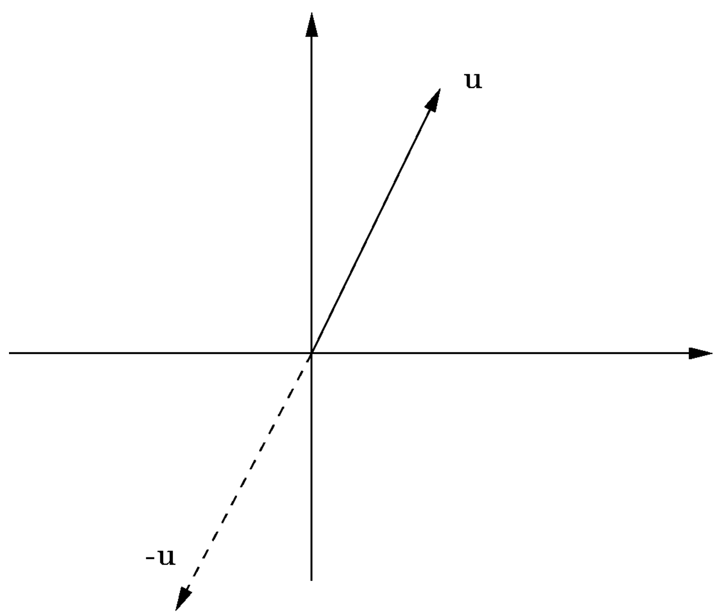


FIGURE 5. El vector **-u** tiene sentido opuesto al de **u**.

Definición 11 (resta). *Si* $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$ *en* $\mathbb{R}^2$ *entonces se define su* **resta** *como*

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (a - c, b - d)$$

Es decir si $\mathbf{u} = (a, b)$ y $\mathbf{v} = (c, d)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u} - \mathbf{v} &= (a, b) + (-c, -d) \\ &= (a - c, b - d) \end{aligned}$$

La interpretación geométrica de la suma debe aparecer como en la figura 6. Nótese que el vector resta está "anclando " en el origen. Sin embargo se acostumbra anclar en $\mathbf{v}$, como aparece en la figura 7.

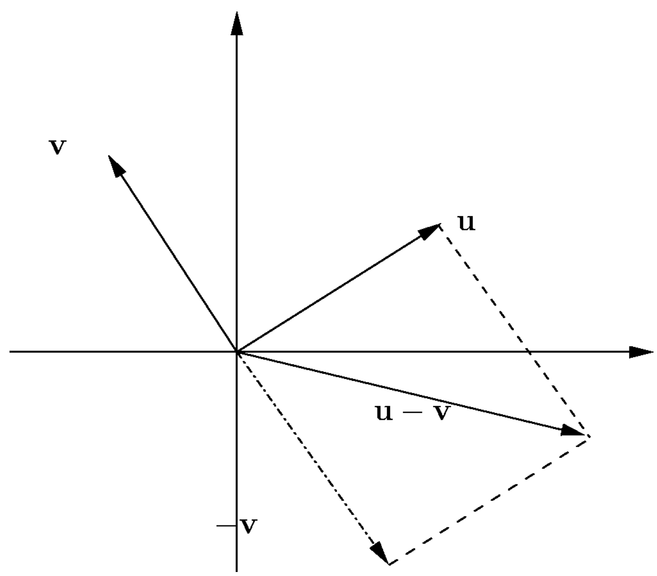


Figure 6. La resta

Definición 12. *Sea* $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. *Se define la* **magnitud** *ó* **norma** *de* $\mathbf{v}$ *como*

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Tenemos que

$$||\mathbf{v}|| = d(\mathbf{0}, P),$$

más generalmente: si también $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$||\mathbf{v} - \mathbf{u}|| = d(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Propiedad 4. *Si* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ *entonces*

$$|| - \mathbf{v}|| = ||\mathbf{v}||$$

Demostración. Pongamos coordenadas a $\mathbf{v}$, esto es $\mathbf{v} = (a, b)$. Luego,

$$\begin{aligned} ||-\mathbf{v}|| &= ||(-a,-b)|| \\ &= \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= ||\mathbf{v}||. \end{aligned}$$

□

Tarea 5. *Sea* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Demostrar que*

$$||\lambda \mathbf{v}|| = |\lambda| \, ||\mathbf{v}||.$$

4. Ángulo entre vectores

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^2$ como en la Figura 8. Sea θ el ángulo entre ellos. Se quiere escribir θ en términos de las coordenadas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Para ésto, recordar que en un triángulo rectángulo con longitud de hipotenusa h (ver figura 9) tenemos que

$$\sin\alpha = \frac{\text{lado opuesto}}{h}, \quad \cos\alpha = \frac{\text{lado adyacente}}{h}$$

En la Figura 10 prolongamos el vector $\mathbf{v}$ una longitud de l hasta completar a un triángulo rectángulo. De esta figura obtenemos que

$$\cos\theta = \frac{||\mathbf{v}|| + l}{||u||}, \quad \sin\theta = \frac{s}{||u||}$$

es decir

$$||\mathbf{u}||\cos\theta - ||\mathbf{v}|| = l \tag{11}$$

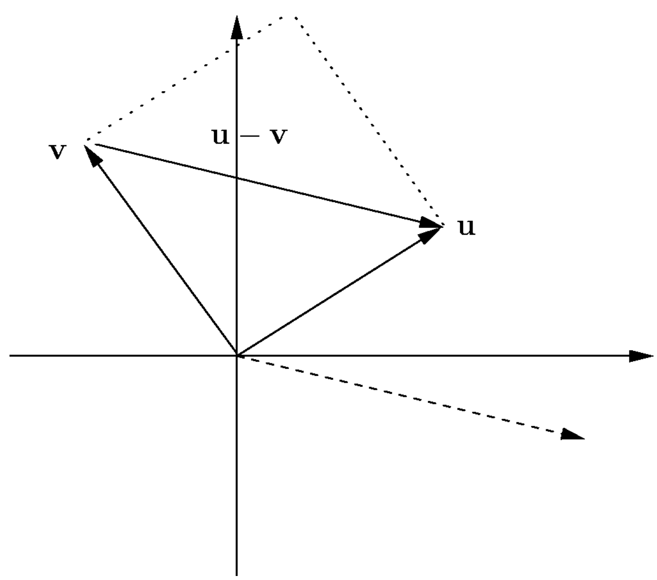


Figure 7. La resta anclada en $\mathbf{v}$.

y

$$||\mathbf{u}|| \sin\theta = s \tag{12}$$

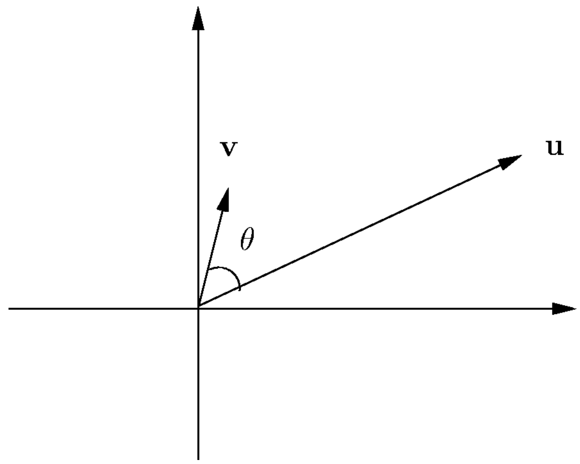


FIGURE 8. Ángulo θ entre vectores.

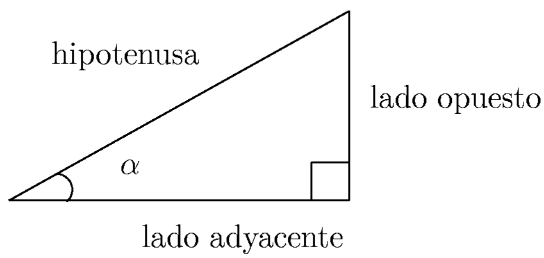


FIGURE 9. Triángulo equilátero.

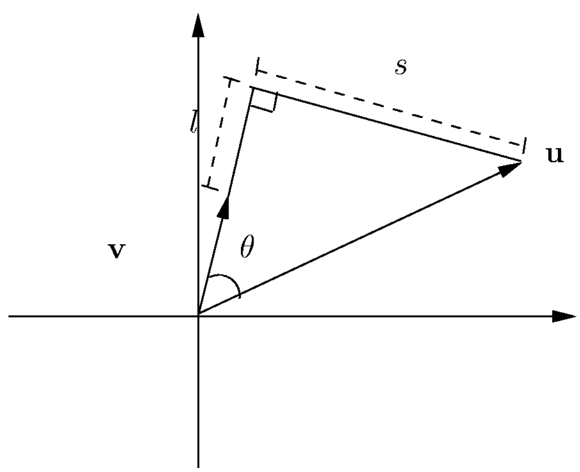


FIGURE 10. Completación a un triángulo rectángulo.

pero también en la Figura 10 aparece un subrectángulo que hacemos notar en la Figura 11, de donde

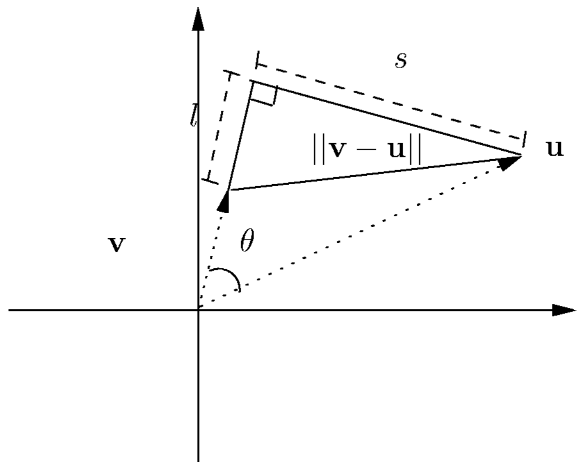


FIGURE 11. Subrectángulo

$$l^2 + s^2 = ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||^2$$

sustituyendo en esta ecuación, las ecuaciones (11) y (12) obtenemos que

$$(||\mathbf{u}|| \cos\theta - ||\mathbf{v}||)^2 + (||\mathbf{u}|| \sin\theta)^2 = ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||^2$$

desarrolando los cuadrados,

$$||\mathbf{u}||^2 \cos^2\theta - 2||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \cos\theta + ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u}||^2 \sin^2\theta = ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||^2$$

es decir,

$$||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||^2 + 2||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \cos\theta$$

ésta ecuación se conoce como la *ley de los cosenos*.

Ahora escribamos coordenadas, $\mathbf{u} = (a, b)$ y $\mathbf{v} = (c, d)$. De la ley de los cosenos obtenemos que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2 + 2||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \cos\theta$$

y cancelando

$$ac + bd = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \cos\theta \tag{13}$$

Podemos escribir de forma más simple esta ecuación si usamos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 13. *Si* $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$, *se define el* **producto punto** *(***escalar, interno, fundamental, geométrico***, etc) como*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ac + bd \ .$$

Con esta notación, la ecuación (13) queda como

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \cos\theta} \tag{14}$$

Cuando $||\mathbf{u}|| \neq 0$ y $||\mathbf{u}|| \neq 0$ podemos despejar el ángulo θ entre los vectores:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||}\right) \tag{15}$$

Debemos recordar que $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Por lo que, si los ángulos los medimos en radianes, el ángulo entre vectores es a lo menos 0 radianes y a lo más π radianes.

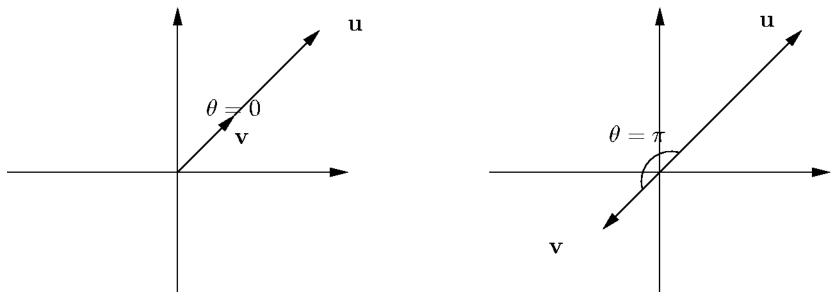


FIGURE 12. Ángulos máximo y mínimo.

Hemos demostrado

TEOREMA 2. *En ángulo θ entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ está dado por*

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||}\right)$$

EJEMPLO 14. Si $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ entonces el ángulo entre $\mathbf{e}_1$ y $2\mathbf{e}_2$ es

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos\left(\frac{(1,0)\cdot(0,2)}{||(1,0)||\,||(0,2)||}\right)\\ &= \arccos 0\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 15. *Si el ángulo entre dos vectores* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$ *no cero es* $\pi/2$ *entonces los vectores se dicen* **perpendiculares** *y en tal caso se escribe* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$*.*

EJEMPLO 16. *Si* $\mathbf{u} = (a, b)$ *entonces el vector* $\mathbf{v} = (-b, a)$ *es perpendicular a* $\mathbf{u}$*. En efecto, el ángulo* θ *entre tales vectores es*

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos\left(\frac{(a,b)\cdot(-b,a)}{||(a,b)||\,||(-b,a)||}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{-ab+ab}{||(a,b)||\,||(-b,a)||}\right)\\ &= \arccos 0\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

El anterior es un caso general:

TEOREMA 3. *Si* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$ *son vectores no cero, entonces*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

DEMOSTRACIÓN. El ángulo θ entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ está dado por

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||}\right)$$

por lo que $\theta = \pi/2$ si y sólo si

$$0 = \cos(\pi/2) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||}$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$$

$\square$

Supongamos que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces $||\mathbf{v}|| \neq 0$, luego el vector

$$\mathbf{u} = \frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$$

tiene norma uno pues

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}|| &= \left|\left|\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}\right|\right| \\ &= \left|\frac{1}{||\mathbf{v}||}\right|\,||\mathbf{v}|| \\ &= \frac{1}{||\mathbf{v}||}\,||\mathbf{v}|| \\ &= 1 \end{aligned}$$

El vector $\mathbf{u}$ se llama el *vector normalizado* de $\mathbf{v}$.

Definición 17. *Si* $\mathbf{w}$ *es un vector tal que* $||\mathbf{w}|| = 1$*, entonces* $\mathbf{w}$ *se llama vector unitario.*

Ejemplo 18. Sea $\mathbf{v} = (1, -1)$ entonces su vector normalizado es, puesto que $\mathbf{v} = \sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

y el vector $\mathbf{u}$ es unitario.

Tarea 6. *Sea* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ *vector no cero. Probar que existe* $\mathbf{u}$ *unitario tal que* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$*.*

Ejemplo 19. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ y $\underset{\sim}{0}$ el vector cero. Probar que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{0} = 0$.

Demostración. Pongamos $\mathbf{v} = (a, b)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\cdot\mathbf{0} &= (a, b)\cdot(0, 0) \\ &= a * 0 + b * 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Tarea 7. *Sean* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{w}$ *vectores en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Probar que*

(1) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ *(distributiva derecha)*
(2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ *(distributiva izquierda)*
(3) $\mathbf{u}\cdot(\lambda\mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ *(homogeneidad)*
(4) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ *(conmutativa)*
(5) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2$

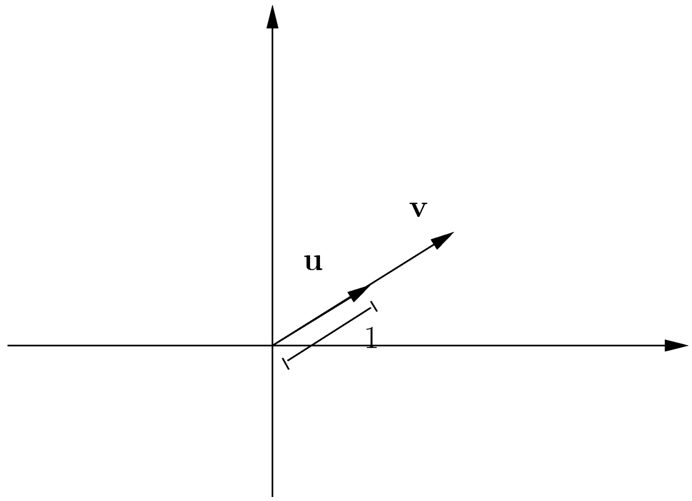


FIGURE 13. El vector normalizado $\mathbf{u}$ de $\mathbf{v}$. Aquí se está suponiendo que $||\mathbf{v}|| > 1$.

(6) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

PROPIEDAD 5. *Si* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ *y* $\mathbf{0} = (0, 0)$ *entonces*

(1) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
(2) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbf{u} = (a, b)$. Entonces

(1) por definición $-\mathbf{u} = (-a, -b))$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= (a, b) + (-a, -b) \\
&= (a + (-a), b + (-b)) && \text{por definición de suma,} \\
&= (0, 0) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{0} &= (a, b) + (0, 0) \\
&= (a + 0, b + 0) && \text{por definición de suma} \\
&= (a, b) && \text{por la propiedad de neutro aditivo en } \mathbb{R}, \\
&= \mathbf{u}
\end{aligned}$$

□

CAPíTULO 2

$\mathbb{R}^n$

1. Generalizaciones a $\mathbb{R}^3$

Se define

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

es decir $\mathbb{R}^3$ consiste de todas las 3-tuplas ordenadas de números reales. Donde el adjetivo *ordenada* se refiere a que el orden es importante. Por ejemplo las 3-tuplas $(-1, 0, 3)$ y $(0, 3, -1)$ están ambas formadas por los mismos números: $-1, 0$ y 3 pero tales 3-tuplas no son iguales:

$$(-1, 0, 3) \neq (0, 3, -1)$$

En general, la igualdad entre vectores de $\mathbb{R}^3$ se define como

Definición 20.

$$(a_0, b_0, c_0) = (a_1, b_1, c_1) \Leftrightarrow a_0 = a_1,\ b_0 = b_1,\ c_0 = c_1$$

Los elementos de $\mathbb{R}^3$ se llaman *vectores* y estos se pueden interpretar como flechas en el espacio euclidiano que parten del vector origen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Las

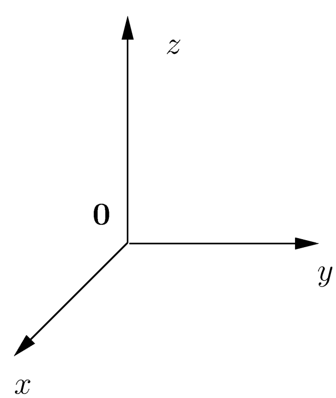
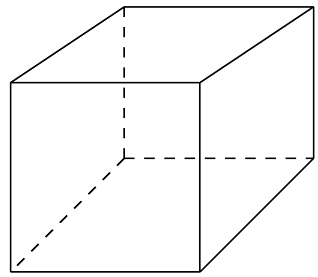
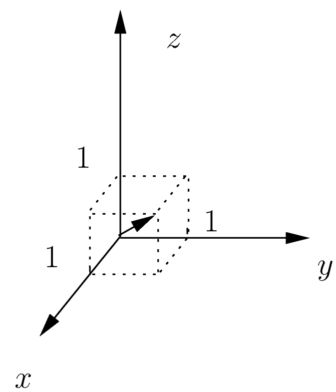


Figure 1. El espacio euclidiano

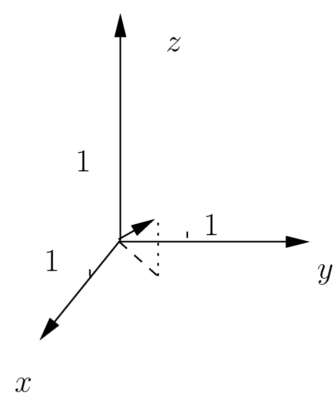
flechas se dibujan de acuerdo a la perspectiva del cubo:



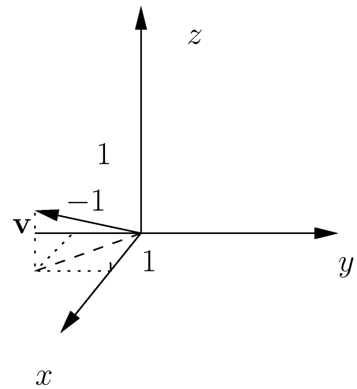
Por ejemplo el vector $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ se dibuja como:



a veces se dibuja la *proyección* sobre el plano xy:



Otro ejemplo, para el vector $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$:



Tarea 8. *Dibuje los siguientes vectores en el espacio euclidiano:*

(1) $(-1, 2, 3)$
(2) $(1, -2, -3)$
(3) $(-1, -1, -1)$
(4) $(1, -3, 3)$

Se pueden hacer tales dibujos con *Maxima* con instrucciones análogas, usando el paquete `draw`:

Maxima

```
load(draw);
```

```
/opt/local/share/maxima/5.18.1/share/draw/draw.lisp
```

entonces se usa `draw3d` para hacer dibujos en el espacio euclidiano y `vector` para vectores. Por ejemplo, para dibujar el vector $(4, 7, 5)$:

Maxima

```
draw3d(vector([0,0,0],[4,7,5]));
```

```
[gr3d(vector)]
```

Desafortunadamente las instrucciones para incluir los ejes, por ejemplo `xaxis=true` no funcionan bien en 3D. Sin embargo, los ejes se pueden interpretar como vectores anclados no en el origen. Por ejemplo, incluyendo `vector([-8,0,0],[16,0,0])` se puede simular el eje x de -8 a 8:

Maxima

```
draw3d(color=red,vector([0,0,0],[4,7,5]),color=black,
vector([-8,0,0],[16,0,0]));
```

```
[gr3d(vector, vector)]
```

y para engrosar el dibujo del eje x usamos `line_width`:

Maxima

```
draw3d(color=red,vector([0,0,0],[4,7,5]),color=black, line_width=2,
vector([-8,0,0],[16,0,0]));
```

```
[gr3d(vector, vector)]
```

podemos incluir el nombre del eje con ayuda de una etiqueta `label`:

Maxima

```
draw3d(color=red,vector([0,0,0],[4,7,5]),color=black, line_width=2,
vector([-8,0,0],[16,0,0]),label(["x",6,0,1]));
```

```
[gr3d(vector, vector, label)]
```

similarmente podemos incluir los otros ejes:

Maxima

```
draw3d(color=red,vector([0,0,0],[4,7,5]),color=black,line_width=2,
vector([-8,0,0],[16,0,0]),
vector([0,-7,0],[0,14,0]),vector([0,0,-7],[0,0,14]),
label(["x",6,0,1]),
label(["y",0,5,1]),
label(["z",.5,.5,8]));
```

```
[gr3d(vector, vector, vector, vector, label, label, label)]
```

Se puede incluir la proyección del vector en el plano xy:

Maxima

```
draw3d(color=red,vector([0,0,0],[4,7,5]),color=black,
line_width=2, vector([-8,0,0],[16,0,0]),
vector([0,-7,0],[0,14,0]),vector([0,0,-7],[0,0,14]), label(["x",6,0,1]),
label(["y",0,5,1]), label(["z",.5,.5,8]),
line_type=dots,
parametric(4,7,t,t,0,5),parametric(4*t,7*t,0,t,0,1));
```

```
[gr3d(vector, vector, vector, vector, label, label, label, parametric,
                                                            parametric)]
```

Todo lo anterior se puede generalizar a un procedimiento general:

Maxima

```
d3Dvector(v):=draw3d(color=red,vector([0,0,0],v),color=black,
line_width=2, vector([-abs(v[1]),0,0],
[2*abs(v[1]),0,0]),
vector([0,-abs(v[2]),0],[0,2*abs(v[2]),0]),
vector([0,0,-abs(v[3])],[0,0,2*abs(v[3])]),
label(["x",abs(v[1]),0,1]),
label(["y",0,abs(v[2]),1]), label(["z",.5,.5,abs(v[3])]),
line_type=dots,
parametric(v[1],v[2],signum(v[3])*t,t,0,abs(v[3])),
parametric(v[1]*t,v[2]*t,0,t,0,1));
```

```
d3Dvector(v) := draw3d(color = red, vector([0, 0, 0], v),
color = black, line_width = 2, vector([- !v !, 0, 0], [2 !v !, 0, 0]),
                                         ! 1!           ! 1!
vector([0, - !v !, 0], [0, 2 !v !, 0]),
             ! 2!           ! 2!
vector([0, 0, - !v !], [0, 0, 2 !v !]), label(["x", !v !, 0, 1]),
                ! 3!           ! 3!                ! 1!
label(["y", 0, !v !, 1]), label(["z", 0.5, 0.5, !v !]), line_type = dots,
               ! 2!                               ! 3!
parametric(v , v , signum(v ) t, t, 0, !v !),
            1   2          3           ! 3!
parametric(v  t, v  t, 0, t, 0, 1))
            1     2
```

Por ejemplo:

Maxima

```
d3Dvector([4,3,-5]);
```

```
[gr3d(vector, vector, vector, vector, label, label, label, parametric,
                                                              parametric)]
```

Notese que si `v=[4,3,-1]` entonces sus coordenadas se llaman con: `v[1]` es la primera, `v[2]` es la segunda, etc.

Maxima

```
v:[4,3,-5];
```

```
[4, 3, - 5]
```

Maxima

```
v[1];
```

```
4
```

Maxima

```
v[2];
```

```
3
```

Maxima

```
v[3];
```

```
- 5
```

TAREA 9. *Modifique el código anterior para que se produzca el vector* **v** *con todas sus proyecciones al plano xy, al eje x y al eje y como en el dibujo que aparece inmediantamente antes de la tarea 8.*

Se puede crear la ilusión de movimiento mandando a llamar a `d3Dvector` varias veces. Antes modifiquemos un poco tal función:

Maxima

```
d3DMvector(v):=draw3d(color=red,vector([0,0,0],v),
color=black,
line_width=2, vector([-2,0,0],
[4,0,0]),
vector([0,-2,0],[0,4,0]),
vector([0,0,-2],
[0,0,4]),
label(["x",2,0,1]),
label(["y",0,2,1]), label(["z",.5,.5,1.5]),
line_type=dots,
parametric(v[1],v[2],signum(v[3])*t,t,0,abs(v[3])),
parametric(v[1]*t,v[2]*t,0,t,0,1));
```

```
d3DMvector(v) := draw3d(color = red, vector([0, 0, 0], v),
color = black, line_width = 2, vector([- 2, 0, 0], [4, 0, 0]),
vector([0, - 2, 0], [0, 4, 0]), vector([0, 0, - 2], [0, 0, 4]),
label(["x", 2, 0, 1]), label(["y", 0, 2, 1]), label(["z", 0.5, 0.5, 1.5]),
line_type = dots, parametric(v , v , signum(v ) t, t, 0, !v !),
                             1   2          3           ! 3!
parametric(v  t, v  t, 0, t, 0, 1))
            1     2
```

y con el siguiente código se pruduce un movimiento circular del vector.

Maxima

```
for k:0 thru 12 step .1 do d3DMvector([sin(k),cos(k),1]);
```

```
done
```

Como en $\mathbb{R}^2$, en $\mathbb{R}^3$ sólo hay dos operaciones fundamentales: suma y producto por escalares:

(1) suma:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_3)$$

(2) producto por escalares : si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

La suma tiene la misma interpretación geométrica que en $\mathbb{R}^2$: es una diagonal de un paralelogramo que se produce en *Maxima* con

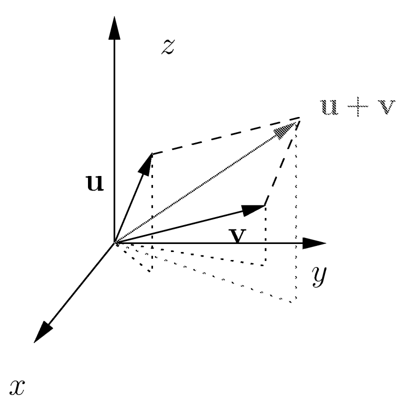


FIGURE 2. La suma de vectores en $\mathbb{R}^3$

Maxima

```
d3Dsuma(v,w):=draw3d(color=green,vector([0,0,0],v),vector([0,0,0],w),
color=red,vector([0,0,0],v+w),color=black,
line_width=2,
vector([-abs(v[1]),0,0],
[2*abs(v[1]),0,0]),
vector([0,-abs(v[2]),0],[0,2*abs(v[2]),0]),
vector([0,0,-abs(v[3])],[0,0,2*abs(v[3])]),
label(["x",abs(v[1]),0,1]),
label(["y",0,abs(v[2]),1]),
label(["z",.5,.5,abs(v[3])]),line_type=dots,
head_length=0.01,vector(v,w),vector(w,v));
```

```
d3Dsuma(v, w) := draw3d(color = green, vector([0, 0, 0], v),
vector([0, 0, 0], w), color = red, vector([0, 0, 0], v + w), color = black,
line_width = 2, vector([- !v !, 0, 0], [2 !v !, 0, 0]),
                         ! 1!            ! 1!
vector([0, - !v !, 0], [0, 2 !v !, 0]),
             ! 2!           ! 2!
vector([0, 0, - !v !], [0, 0, 2 !v !]), label(["x", !v !, 0, 1]),
                ! 3!           ! 3!                ! 1!
label(["y", 0, !v !, 1]), label(["z", 0.5, 0.5, !v !]), line_type = dots,
               ! 2!                                ! 3!
head_length = 0.01, vector(v, w), vector(w, v))
```

donde los vectores sumando aparecen en verde y el vector suma en rojo.

Maxima

```
d3Dsuma([3,2,1],[4,-2,1]);
```

```
[gr3d(vector, vector, vector, vector, vector, vector, label, label,
                                                label, vector, vector)]
```

y el producto por escalares estira, encoge ó cambia de dirección a los vectores: El

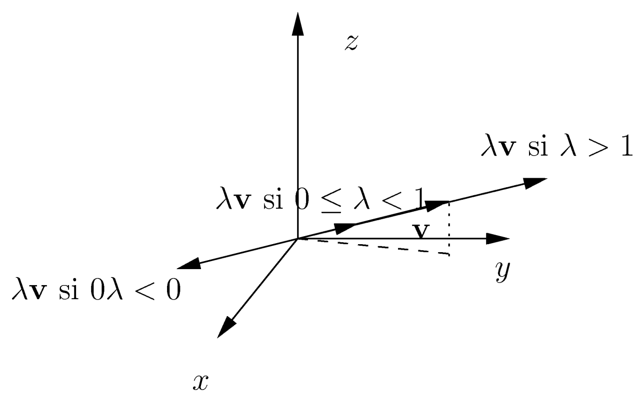


Figure 3. Producto por escalares

código en *Maxima*:

Maxima

```
d3DProdXEsc(lambda,v):=draw3d(color=green,vector([0,0,0],v),
color=red,vector([0,0,0],lambda*v),color=black,

line_width=2,
vector([-abs(v[1]),0,0],
[2*abs(v[1]),0,0]),
```

```
vector([0,-abs(v[2]),0],[0,2*abs(v[2]),0]),
vector([0,0,-abs(v[3])],[0,0,2*abs(v[3])]),
label(["x",abs(v[1]),0,1]),
label(["y",0,abs(v[2]),1]),
label(["z",.5,.5,abs(v[3])]));
```

produce el producto $\lambda\mathbf{v}$ donde $\mathbf{v}$ aparece en verde y el producto resultante aparece en rojo. Por ejemplo: $2(-1,2,3)$ se dibuja con:

Maxima

```
d3DProdXEsc(2,[-1,2,3]);
```

También se pueden definir la norma y el producto punto analogamente al caso $\mathbb{R}^2$.

2. Generalizaciones a $\mathbb{R}^n$

Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto de todas las n-uplas ordenadas se denota con $\mathbb{R}^n$. En símbolos:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se llaman *vectores*. La igualdad de vectores se define como

Definición 21.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

Definición 22.

(1) *La* **suma de vectores en** $\mathbb{R}^n$ *se define como*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(2) *El* **producto por escalares** *se define como: si* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Al vector $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0$ se le llama *vector cero* ó *vector origen*.

Definición 23 (inverso aditivo). *Si* $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *entonces se define*

$$-\mathbf{v} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

La siguiente propiedad describe el álgebra de vectores de $\mathbb{R}^n$

Teorema 4. *Si* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$ *son vectores de* $\mathbb{R}^n$, *entonces*

A1 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(asociativa)*
A2 $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ *(conmutativa)*
A3 $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ *(neutro)*
A4 $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ *inverso aditivo)*

Si además $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*:*

E1 $\lambda_1(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \lambda_1\mathbf{v} + \lambda_1\mathbf{w}$ *(distributiva derecha)*
E2 $(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v} + \lambda_2\mathbf{v}$ *(distributiva izquierda)*
E3 $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{v}) = (\lambda_1\lambda_2)\mathbf{v}$ *(asociativa)*
E4 $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ *(preservación de escala)*

Demostración.

A2 Pongamos

$$\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \mathbf{w} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v}+\mathbf{w} &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) && \text{por def. de suma} \\ &= (y_1+x_1, y_2+x_2, \ldots, y_n+x_n) && \text{por conmutativa en } \mathbb{R} \\ &= \mathbf{w}+\mathbf{v} && \text{por definición de suma.} \end{aligned}$$

E4 Pongamos $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Entonces

$$\begin{aligned} 1\mathbf{v} &= (1x_1, 1x_2, \ldots, 1x_n) && \text{por definición de producto por escalares} \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) && \text{por neutro multiplicativo en } \mathbb{R} \\ &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

□

Tarea 10. *Demuestre las propiedades A1,A3,A4 y* $E1, E2, E3$.

También la noción de norma y producto punto se pueden generalizar a $\mathbb{R}^n$.

Definición 24. *Si* $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *se define su* **norma** *como*

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

La interpretación de la norma es la misma que en $\mathbb{R}^2$ ó en $\mathbb{R}^3$: mide cuán largo es un vector.

Ejemplo 25. Calcular la norma de $\mathbf{v} = (-1, 0, 1, 2, 3, 2)$.
Sol. Por definición

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v}|| &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{19} \end{aligned}$$

Propiedad 6. *Sea* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

(1) $||\mathbf{v}|| \geq 0$
(2) $||\mathbf{v}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$
(3) $||\lambda\mathbf{v}|| = |\lambda|\,||\mathbf{v}||$

Demostración.

(1) La norma es una raíz cuadrada.
(2)
($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{v} = (0, \ldots, 0)$ y así

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sqrt{0^2 + \cdots + \cdots 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $||\mathbf{v}|| = 0$. Podemos poner $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$. Entonces $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = 0$. Por lo que $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$. Luego,

$$0 \leq x_1^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$$

lo que implica $x_1^2 = 0$. Similarmente

$$0 \leq x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$$

que implica $x_2^2 = 0$. Etcétera. Así obtenemos que $x_1^2 = 0$, $x_2^2 = 0, \ldots, x_n^2 = 0$, de donde $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Lo que implica que

$$\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) = \mathbf{0}$$

(3) Tarea.

□

Definición 26. *Si* $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ *y* $\mathbf{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ *entonces se define el* **producto punto** *como*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Debe notarse que el producto punto de dos vectores *no es un vector, sino un escalar*: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \in \mathbb{R}$.

Teorema 5. *Sean* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Se cumplen*

(1) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ *(conmutativa)*
(2) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ *(distributiva)*
(3) $\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{w})$ *(homgeneidad)*
(4) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{v}||^2$

Demostración.

(1) Pongamos coordenadas:

$$\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n), \ \mathbf{w} = (y_1, \ldots, y_n)$$

Entones, por definición de producto punto

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \\ &= y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n && \text{por conmutativa en } \mathbb{R} \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

de nuevo, por definición de producto punto.

(2) Tarea.
(3) Tarea.
(4) Pongamos coordenadas:

$$\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$$

entonces, por definición de norma,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v}||^2 &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 \\ &= x_1 x_1 + \cdots + x_n x_n \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

por definición de producto punto.

□

También, como en $\mathbb{R}^2$, se pueden medir ángulos con la ayuda del producto punto. Para hacer esto en $\mathbb{R}^n$, antes necesitamos de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Definición 27. *Si* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *son dos vectores no cero, diremos que* $\mathbf{w}$ *es* **perpendicular a w** *y escribiremos* $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ *si*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$$

Teorema 6 (desigualdad de Cauchy-Schwartz). *Si* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *entonces*

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||$$

Demostración. Tenemos dos casos: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ó $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

(1) Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ y $||\mathbf{v}|| = 0$, por lo que

$$|\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}| = 0 = ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||$$

y el teorema se cumple.

(2) Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ entonces $||\mathbf{v}|| \neq 0$ y entonces definimos un nuevo vector $\mathbf{w}'$:

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||^2}\right)\mathbf{v} \tag{16}$$

Tal vector $\mathbf{w}'$ es perpendicular a $\mathbf{w}$ porque

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}' \cdot \mathbf{v} &= \left(\mathbf{w} - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||^2}\right)\mathbf{v}\right) \cdot \mathbf{v} \\
&= \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
&= \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
0 \leq ||\mathbf{w}'||^2 &= \mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}' \\
&= \mathbf{w}' \cdot \left(\mathbf{w} - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||^2}\right)\mathbf{v}\right) \\
&= \mathbf{w}' \cdot \mathbf{w} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||^2} \underbrace{\mathbf{w}' \cdot \mathbf{v}}_{0} \\
&= \mathbf{w}' \cdot \mathbf{w} \\
&= \left(\mathbf{w} - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||^2}\right)\mathbf{v}\right) \cdot \mathbf{w} \\
&= \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}{||\mathbf{v}||^2}
\end{aligned}$$

despejando,

$$\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}{||\mathbf{v}||^2} \leq \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$$

y de nuevo,

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 \leq ||\mathbf{w}||^2 ||\mathbf{v}||^2$$

Sacando raíces cuadradas

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}|| \ .$$

□

TAREA 11. *Probar que* $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| = ||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}|| \Leftrightarrow \mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$*, para alún* $\lambda \in \mathbb{R}$*. (sugerencia: ver demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwartz).*

Gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tiene sentido la siguiente definición

DEFINICIÓN 28 (Ángulo entre vectores). *Sean* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{w}$ *un par de vectores no cero en* $\mathbb{R}^n$*. Se define* θ **ángulo entre v** *y* **w** *como*

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||}\right)$$

PROPIEDAD 7. *Sean* $\mathbf{v}$*,* $\mathbf{w}$ *un par de vectores no cero en* $\mathbb{R}^n$*.*

$$\mathbf{v}\perp\mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\pi/2 = \arccos(x) \Leftrightarrow x = 0$. Luego, el ángulo θ entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ satisface $\theta = \pi/2$ si y sólo si $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$. □

TAREA 12.

(1) *Demostrar que* $(2,0,4)$*,* $(4,1,-1)$ *y* $(6,7,7)$ *son vértices de un triángulo rectángulo en* $\mathbb{R}^3$*.*
(2) *Hallar la distancia de*
   (a) $(3,1,2,4)$ *a* $(-1,2,1,2)$ *en* $\mathbb{R}^4$
   (b) $(2,-1,3)$ *a* $(4,1,-2)$ *en* $\mathbb{R}^3$
   (c) $(-1,2,1,4,7,-3)$ *a* $(2,1,-3,5,4,5)$ *en* $\mathbb{R}^6$
(3) *Sea* $\mathbf{u} = (-1,3,4)$*.*
   (a) *Encontrar el valor de* x *tal que* $(x,-3,5)$ *sea perpendicular a* u*.*
   (b) *Encontrar el valor de* y *tal que* $(-3,y,10)$ *sea perpendicular a* u
   (c) *Si además* $\mathbf{v} = (2,1,-1)$*,* $\mathbf{w} = (-2,-1,-3)$
      (i) *hallar un vector no cero perpendicular tanto a* $\mathbf{u}$ *como a* $\mathbf{v}$
      (ii) *hallar un vector no cero perpendicular tanto a* $\mathbf{u}$ *como a* $\mathbf{w}$
(4) *Hallar el ángulo entre* $\mathbf{v} = (1,-1,2,3,0,4)$ *y* $\mathbf{w} = (7,0,1,3,2,4)$ *en* $\mathbb{R}^6$*.*
(5) *Demostrar que los vectores* $||\mathbf{v}||\,\mathbf{w} + ||\mathbf{w}||\,v$ *y* $||\mathbf{v}||\,\mathbf{w} - ||\mathbf{w}||\,\mathbf{v}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *son perpendiculares.*

EJEMPLO 29. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que

$$(\mathbf{v}-\mathbf{w})\perp(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \Leftrightarrow ||\mathbf{v}|| = ||\mathbf{w}||$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}-\mathbf{w})\perp(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \Leftrightarrow \quad & 0 = (\mathbf{v}-\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})\\ & = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}\\ & = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}\\ \Leftrightarrow ||\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{w}||^2 & \\ \Leftrightarrow ||\mathbf{v}|| = ||\mathbf{w}|| & \end{aligned}$$

□

TEOREMA 7 (Desigualdad del triángulo). *Si* $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$*, entonces*

$$||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| \le ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^2 &= (\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \\
&= \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} \\
&= \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+2\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} \\
&= ||\mathbf{v}||^2+2\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+||\mathbf{w}||^2 \\
&\leq ||\mathbf{v}||^2+2\,|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|+||\mathbf{w}||^2 && \text{pues } \forall x\in\mathbb{R}, x\leq|x|, \\
&\leq ||\mathbf{v}||^2+2\,||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||+||\mathbf{w}||^2 && \text{por la desigualdad de Cauchy-Schwartz} \\
&= (||\mathbf{v}||+||\mathbf{w}||)^2
\end{aligned}
$$

es decir,

$$||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^2 \leq (||\mathbf{v}||+||\mathbf{w}||)^2 \ .$$

Sacando raíces cuadradas a ambos lados, obtenemos

$$||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}||+||\mathbf{w}|| \ .$$

□

Tarea 13.

(1) *Usando vectores, probar que en un triángulo rectángulo, el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.*

(2) *Si $\mathbf{v},\mathbf{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, probar que*
  (a) $||\mathbf{v}-\mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}||+|||\mathbf{w}||$
  (b) $||\mathbf{v}||-||\mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}-\mathbf{w}||$
  (c) $|\,||\mathbf{v}||-||\mathbf{w}||\,| \leq ||\mathbf{v}-\mathbf{w}||$

3. Combinaciones lineales

Definición 30. *En $\mathbb{R}^n$, se llama* **combinación lineal** *de los vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_\ell$ a cualquier vector $\mathbf{u}$ que se exprese de la forma*

$$\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\ldots+\lambda_\ell\mathbf{v}_\ell$$

donde $\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell$ son escalares.

Ejemplo 31. En $\mathbb{R}^2$, $(-4,5)$ es combinación lineal de $(1,1)$ y $(2,-1)$ porque

$$(-4,5) = 2(1,1)+(-3)(2,-1)$$

Ejemplo 32. En $\mathbb{R}^2$; $(2,1)$ no es combinación lineal de $(1,0)$ y $(-2,0)$; porque si lo fuera entonces existen $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ tales que

$$
\begin{aligned}
(2,1) &= \lambda_1(1,0)+\lambda_2(-2,0) \\
&= (\lambda_1-2\lambda_2,0)
\end{aligned}
$$

lo que implica que, igualando coordenadas.

$$2=\lambda_1-2\lambda_2 \text{ y } 1=0$$

siendo ésta última ecuación, un absurdo.

Ejemplo 33. En $\mathbb{R}^3$ todo vector $u=(x_1,x_2,x_3)$ es combinación lineal de los vectores

$$\mathbf{e}_1=(1,0,0),\quad \mathbf{e}_2=(0,1,0),\quad \mathbf{e}_3=(0,0,1)\ .$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) &= (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)\\ &= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)\\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

□

Ejemplo 34. En $\mathbb{R}^n$ todo vector $\mathbf{u}$ es combinación lineal de los vectores

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

Demostración. Pongamos $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, x_n)\\ &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, \ldots, 0, 1)\\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\end{aligned}$$

□

Ejemplo 35. Dados varios vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ en $\mathbb{R}^n$, cualquiera de ellos, por ejemplo $\mathbf{v}_1$ es combinacioón de los mismos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$.

Demostración.

$$\mathbf{v}_1 = 1\,\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots 0\,\mathbf{v}_\ell$$

□

Ejemplo 36. El vector $\mathbf{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$

Demostración.

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_\ell$$

□

Ejemplo 37. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ entonces $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ también lo es.

Demostración. Por hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_\ell\mathbf{v}_\ell\\ \mathbf{w} &= \mu_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_\ell\mathbf{v}_\ell\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \lambda_1\mathbf{v}_1 + \mu_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_\ell\mathbf{v}_\ell + \mu_\ell\mathbf{v}_\ell\\ &= (\lambda_1 + \mu_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\lambda_\ell + \mu_\ell)\mathbf{v}_\ell\end{aligned}$$

□

Tarea 14.

(1) *Si* $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{w} = (c_1, c_2, c_3)$, *escríbase en términos de los* a_i, b_i, c_i *las coordenadas del vector*

$$\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$$

(2) *Si en* $|R^n$*:*

$$\mathbf{v}_1 = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1})$$
$$\mathbf{v}_2 = (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2})$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn})$$

y $y_1, \dots, y_n$ *escalares, escríbase las coordenadas del vector*

$$y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n$$

(3) *Demuestre en en* $\mathbb{R}^2$ *todo vector* (x, y) *es combinación lineal de los vectores* $(1, 0)$ *y* $(1, 1)$.
(4) *Demuestre que en* $\mathbb{R}^3$ *todo vector* (x, y, z) *es combinación lineal de los vectores* $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0$, $(1, 1, 1)$.
(5) *Generalizar a* $\mathbb{R}^n$ *el ejercicio anterior.*
(6) *Expresar el vector* $(8, -1)$ *como combinación lineal de* $(2, 1)$ *y* $(3, -1)$.
(7) *¿Es* $(1, 0)$ *combinación lineal de los vectores* $(1, 2)$ *y* $(-2, -4)$*?*
(8) *Demostrar que en* $\mathbb{R}^3$ *hay vectores que no son combinación lineal de los vectores* $(1, 1, 0)$ *y* $(2, -1, 0)$.

4. Subespacios

Definición 38. *Un subconjunto* W *de* $\mathbb{R}^n$ *es un* **subespacio vectorial** *de* $\mathbb{R}^n$ *si se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) *el vector* $\mathbf{0}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *está en* W*;*
(2) *si* $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in W$ *entonces* $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in W$ *(cerradura de la suma);*
(3) *si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $\mathbf{u} \in W$ *entonces* $\lambda\mathbf{u} \in W$ *(cerradura del producto por escalares).*

Es decir, un *subespacio vectorial* es un conjunto de vectores que tiene al vector cero, además de ser cerrado con las operaciones de vectores.

Ejemplo 39. Sea

$$W = \{(a, 0) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$$

entonces W es subespacio de $\mathbb{R}^2$, pues

(1) $(0, 0) \in W$ pues la segunda coordenada es cero.
(2) Si $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in W$ entonces $\mathbf{u} = (a, 0)$ y $\mathbf{v} = (a', 0)$. Luego

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (a + a', 0) \in W.$$

(3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in W$ entonces $\mathbf{u} = (a, 0)$. Luego

$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda a, 0) \in W.$$

Ejemplo 40. Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y - 3z = 0\}.$$

Demostrar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Demostración.

(1) $(0, 0, 0) \in S$ pues $2 * 0 - 0 - 3 * 0 = 0$.

(2) Si $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S$ entonces $\mathbf{u} = (x, y, z)$ y $\mathbf{w} = (x', y', z')$ que cumplen

$$2x - y - 3z = 0 \tag{17}$$

$$2x' - y' - 3z' = 0. \tag{18}$$

Tenemos que mostrar que $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in W$. Tenemos que

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (x + x', y + y', z + z')$$

estas coordenadas satisfacen

$$\begin{aligned} 2(x + x') - (y + y') - 3(z + z') &= 2x + 2x' - y - y' - 3z - 3z' \\ &= (2x - y - 3z) + (2x' - y' - 3z') \\ &= 0 + 0 && \text{según las ecuaciones (17), (18)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo que podemos escribir

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} \in W.$$

(3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in W$ entonces $\mathbf{u} = (x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfacen

$$2x - y - 3z = 0. \tag{19}$$

Luego

$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

cuyas coordenadas satisfacen

$$\begin{aligned} 2(\lambda x) - (\lambda y) - 3(\lambda z) &= \lambda(2x - y - 3z) \\ &= \lambda 0 && \text{según la ecuación (19),} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 41. Establecer si el conjunto

$$T = \{(x, y, z) \in R^3 \,|\, 2x - y - 3z = 1\}$$

es un subespacio vectorial ó no.

Sol. Tenemos que el vector $(0, 0, 0) \notin T$ pues

$$2 * 0 - 0 - 3 * 0 \neq 1$$

lo que contradice la primera condición de la definición de subsespacio. Por lo tanto: *T no es subespacio vectorial*.

Ejemplo 42. Establecer si el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 3y = 0\}$$

es un subespacio vectorial ó no.

Sol. Tenemos que $\mathbf{u} = (\sqrt{3}, 1) \in A$ pues

$$(\sqrt{3})^2 - 3 * 1 = 0,$$

similarmente $\mathbf{w} = (-\sqrt{3}, 1) \in A$ pues

$$(-\sqrt{3})^2 - 3 * 1 = 0,$$

pero $\mathbf{u} + \mathbf{w} \notin A$ porque

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (0, 2)$$

y $0^2 - 3 * 2 \neq 0$.

Lo anterior contradice la cerradura de la suma en la segunda condición de la definición de subespacio vectorial. Por lo tanto A *no es subespacio vectorial*.

Ejemplo 43. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ vectores fijos en $\mathbb{R}^n$. Se define el conjunto

$$W = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \,|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Demostrar que W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

(1) $\mathbf{0} = 0\mathbf{v_1} + 0\mathbf{v_2} \in W$;

(2) si $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ están en W entonces

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} \tag{20}$$

$$\mathbf{w} = \mu_1 \mathbf{v_1} + \mu_2 \mathbf{v_2}. \tag{21}$$

Tenemos que demostrar que $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ está en W.

Sumando lado a lado las ecuaciones (20) y (21) obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mu_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \mu_2 \mathbf{v}_2 \\ &= (\lambda_1 + \mu_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\mathbf{v}_2 \\ &\in W.\end{aligned}$$

(3) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u}$ entonces

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2}.$$

Tenemos que demostrar que $\alpha \mathbf{u} \in W$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha \mathbf{u} &= \alpha(\lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2}) \\ &= \alpha\lambda_1 \mathbf{v_1} + \alpha\lambda_2 \mathbf{v_2} \\ &\in W.\end{aligned}$$

□

Los subespacios vectoriales están entre el subespacio más pequeno que es $\{bd0\}$ y el más grande, que es $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 44. El conjunto formado por sólo el vector cero $\{\mathbf{0}\}$, con $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Demostración.

(1) $\mathbf{0} \in \{\mathbf{0}\}$;

(2) si $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ están en $\{\mathbf{0}\}$ entonces

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

por lo que

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \{\mathbf{0}\};$$

(3) si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in \{\mathbf{0}\}$ entonces

$$\begin{aligned}\lambda \mathbf{u} &= \lambda \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \\ &\in \{\mathbf{0}\}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 45. $\mathbb{R}^n$ *es subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$

Demostración.

(1) $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$;
(2) si $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ pertenecen a $\mathbb{R}^n$, entonces, por la definición de suma de vectores, $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$;
(3) si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ entonces, por definición $\lambda\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

□

Tarea 15. *Establecer (demostrar) si los conjuntos siguientes son subespacios vectoriales.*

(1) $W = \{(x, y) \mid 3x - 5y = 0\}$
(2) $W = \{(x, y, z) \mid 2x + 3y - 4z = 0\}$
(3) $W = \{(x, y, z) \mid 2x - 3x + 4z = 0 \text{ y } x + 2y + 3z = 0\}$
(4) $W = \{(x, y, z) \mid x + y + 3z^2 = 1\}$
(5) $W = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$

Tarea 16. *Sea* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *fijo. Demostrar que el conjunto*

$$S = \{\alpha\mathbf{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$*.*

El punto (1) de la definición de subespacio vectorial puede cambiarse por $W \neq \varnothing$. Es decir:

Propiedad 8. W *es subespacio de* $\mathbb{R}^n$ *si y sólo si*

(1) $W \neq \varnothing$*;*
(2) *si* $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in W$ *entonces* $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in W$*;*
(3) *si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $\mathbf{u} \in W$ *entonces* $\lambda\mathbf{u} \in W$*.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que W es subespacio vectorial. Entonces, por la primera condición de la definición de subespacio, tenemos que $\mathbf{0} \in W$, en consecuencia $W \neq \varnothing$. Las condiciones siguientes son las de cerradura de las operaciones de vectores.

($\Leftarrow$) Supongamos que se cumplen las condiciones (1), (2) y (3) de la propiedad. Tenemos que demostrar que W es subespacio vectorial.

(1) Como $W \neq \varnothing$ entonces $\exists\mathbf{w} \in W$ con $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Luego, por la condición (3) para $\lambda = 0$:

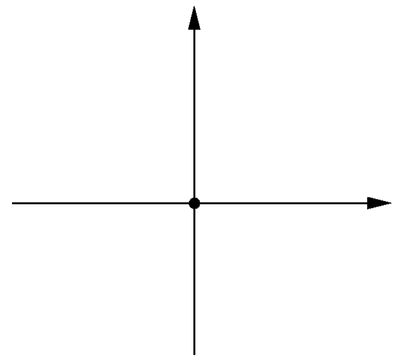
$$\underbrace{0\mathbf{w}}_{\mathbf{0}} \in W$$

así, $\mathbf{0} \in W$.
(2) La hipótesis (2).
(3) La hipótesis (3).

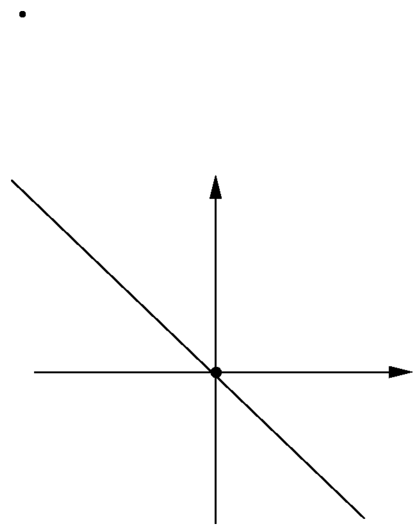
□

Uno podría preguntar ¿qué es un subespacio?. Si no queremos una respuesta tautológica, se puede responder que depende. Por ejemplo, resulta que los subespacios de $\mathbb{R}^2$ son

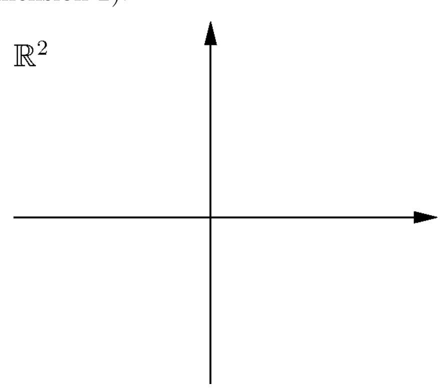
(1) $\{(0, 0)\}$ el subespacio formado únicamente por el vector cero: este es un subespacio de *demensión cero.*



(2) Rectas que pasan por el origen (*dimensión* 1): que pasen por el origen es el requerimiento de que un subespacio contenga al vector cero:

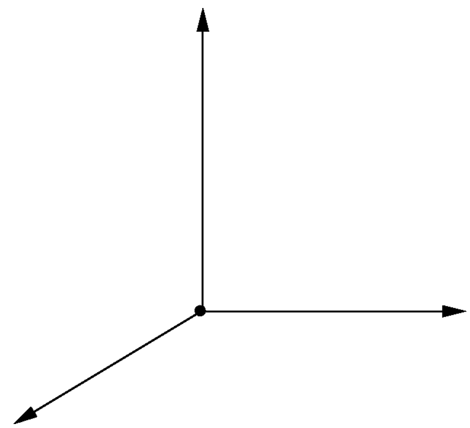


(3) R^2: todo el plano cartesiano. Éste es el subespacio más grande que contiene $\mathbb{R}^2$ (dimensión 2).

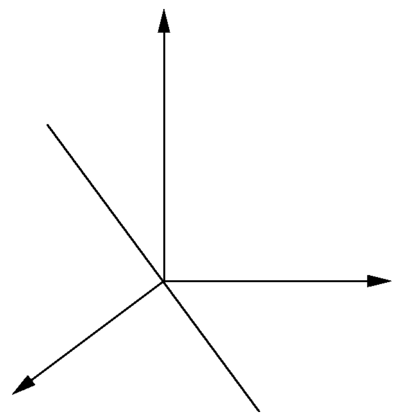


Similarmente, se puede decir que los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son

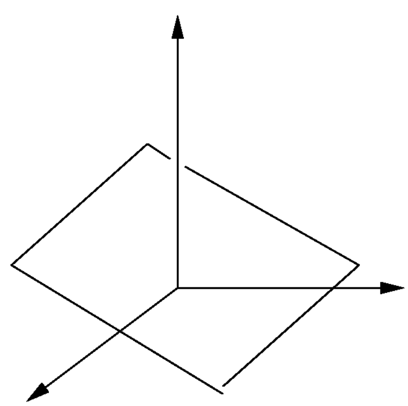
(1) $\{(0,0,0)\}$ (dimensión cero);



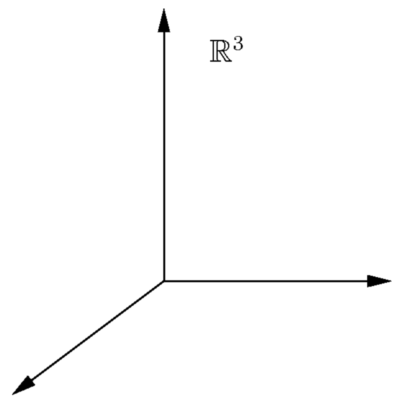
(2) líneas que pasan por el origen (dimensión uno);



(3) planos que contienen al origen (dimensión 2):



(4) todo el espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$:



Definición 46. *Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Denotamos con*

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \rangle = \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$$

al conjunto de todas la combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$. Esto es

$$\operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell) = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_\ell \mathbf{v}_\ell \,|\, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}\}$$

Propiedad 9. *El conjunto*

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \rangle = \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$$

es un subespacio vectorial.

Demostración.

(1) $\mathbf{0} \in \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$ pues

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_\ell;$$

(2) si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_\ell \mathbf{v}_\ell \\ \mathbf{w} &= \mu_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_\ell \mathbf{v}_\ell \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\lambda_1 + \mu_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\lambda_\ell + \mu_\ell)\mathbf{v}_\ell \in \operatorname{gen}(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$$

(3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \operatorname{gen}(v_1, \ldots, v_\ell)$ entonces

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_\ell \mathbf{v}_\ell$$

y

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{v} &= \lambda(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_\ell \mathbf{v}_\ell) \\ &= \lambda\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda\lambda_\ell \mathbf{v}_\ell \\ &\in \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell) \end{aligned}$$

□

Definición 47. *El conjunto*

$$\langle \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{v}_\ell \rangle = \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$$

se llama el **subespacio generado por** $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$.

Nótese que, para cada i:

$$\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 1\mathbf{v}_i + \cdots + 0\mathbf{v}_\ell$$

por lo que, cada $\mathbf{v}_i \in \text{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$.

Ejemplo 48. Sean $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ vectores en $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$\mathbb{R}^2 = \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).$$

Demostración.

(1) $\mathbb{R}^2 \subseteq \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$: si $\mathbf{v} \in R^2$ entonces $\mathbf{v} = (a,b)$ por lo que

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \in \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).$$

(2) $\text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \subseteq \mathbb{R}^2$: si $\mathbf{v} \in \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ entonces

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e_1} + \lambda_2 \mathbf{e_2}$$

y como las operaciones de vectores en $\mathbb{R}^2$ son cerradas entonces $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

□

Tarea 17. *Sean* $\mathbf{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0,0,\ldots,1)$ *vectores en* $\mathbb{R}^n$*. Probar que*

$$\mathbb{R}^n = \text{gen}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

Ejemplo 49. Pensemos a los vectores en $\mathbb{R}^n$ como *vectores columna*. Esto es,

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

supongamos, además, que tenemos un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, a resolver en las variables $y_1, \ldots, y_n$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \cdots & + & a_{1n}y_n & = & b_1 \\ a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \cdots & + & a_{2n}y_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}y_1 & + & a_{m2}y_2 & + & \cdots & + & a_{mn}y_n & = & b_m \end{array} \tag{22}$$

Es fácil ver que tal sistema es equivalente a la ecuación vectorial

$$y_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + y_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

por lo que el sistema de ecuaciones (22) tiene solución si y sólo si el vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ está en el subespacio generado por los vectores columna $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$

5. Dependencia e independencia lineal

Definición 50. *Sean* $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in \mathbb{R}^n$.

(1) *Se dice que* **u depende linealmente del conjunto** $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ *si*
$$u \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \rangle$$
(2) *Se dice que el conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ *es linealmente dpendiente si al menos un* $\mathbf{v}_i$ *depende linealmente de* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$

Ejemplo 51. Sean $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (2,2,0)$, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$. Entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente pues
$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$$

Teorema 8. *Un conjunto de vectores en* $\mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ *es linealmente dependiente si y sólo si existe una combinación lineal de ellos igual a cero no trivial. Es decir,*
$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_\ell \mathbf{v}_\ell = \mathbf{0}$$
con algún $\lambda_i \neq 0$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Por hipótesis
$$\mathbf{v}_i = \lambda_1 \mathbf{v} + \cdots + \lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots$$
despejando
$$\mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + (-1)\mathbf{v}_i + \lambda_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots$$
la cual es una combinación lineal no trivial (el coeficiente de $\mathbf{v}_i$ es $-1 \neq 0$).

($\Leftarrow$) Supongamos $\lambda_i \neq 0$. De nuevo, despejando de la combinación lineal igual a cero, obtenemos que
$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdot + \lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + \lambda_{i+!}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + \lambda_\ell \mathbf{v}_\ell = -\lambda_i \mathbf{v}_i$$
luego
$$\frac{\lambda_1}{-\lambda_i}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i}\mathbf{v}_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + \frac{\lambda_\ell}{-\lambda_i}\mathbf{v}_\ell = \mathbf{v}_i$$
por lo tanto
$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\ell\} \text{ es linealmente dependiente.}$$
□

Definición 52. *Un conjunto de vectores se dice* **linealmente independiente** *si no es linealmente dependiente.*

Como consecuencia inmediata del teorem anterior tenemos que

Teorema 9. *Un conjunto de vectores* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ *es linealmente independiente si y sólo si* $\forall \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_\ell \mathbf{v}_\ell = \mathbf{0}$ *ocurre que* $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_\ell = 0$.

Luego, para demostrar que un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ es linealmente independiente basta con checar que
$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_\ell \mathbf{v}_\ell = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_\ell = 0.$$

Ejemplo 53. El conjunto de vectores $(1,0,0)$, $(2,2,0)$, $(3,3,3)$ forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$

Demostración. Supongamos

$$\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(2,2,0)+\lambda_3(3,3,3)=(0,0,0)$$

entonces

$$(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3, 2\lambda_2+3\lambda_3, 3\lambda_3)=(0,0,0)$$

igualando coordenadas obtenemos que

$$\begin{aligned}\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3&=0\\ 2\lambda_2+3\lambda_3&=0\\ 3\lambda_3&=0\end{aligned}$$

de la última ecuación obtenemos que $\lambda_3=0$; sustituyendo en la segunda obtenemos que $\lambda_2=0$; a su vez sustituimos en la primera para obtener que también $\lambda_1=0$. $\square$

Ejemplo 54. Probar que los vectores $(-1,1)$, $(4,5)$ son linealmente independientes.

Demostración. Supongamos que

$$\lambda_1(-1,1)+\lambda_2(4,5)=(0,0)$$

entonces

$$(-\lambda_1+4\lambda_2, \lambda_1+5\lambda_2)=(0,0)$$

luego, igualando coordenadas

$$\begin{aligned}-\lambda_1+4\lambda_2&=0\\ \lambda_1+5\lambda_2&=0\end{aligned}$$

Tal sistema se puede resolver por la regla de Cramer,

$$\lambda_1=\frac{\begin{vmatrix}0&4\\0&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1&4\\1&5\end{vmatrix}}=\frac{0}{-9}=0,\quad \lambda_2=\frac{\begin{vmatrix}-1&0\\1&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1&4\\1&5\end{vmatrix}}=\frac{0}{-9}=0$$

$\square$

Ejemplo 55. El conjunto $\{\mathbf{0}\}$ es linealmente dependiente.

Demostración.

$$\mathbf{0}=1\mathbf{0}$$

es combinación lineal no trivial igual a cero. $\square$

Propiedad 10. *Si a un conjunto de vectores linealmente dependiente se le añaden más vectores este nuevo conjunto permanece linealmente dependiente.*

Demostración. Supongamos que $\{\mathbf{v}_1,\dots\mathbf{v}_\ell\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Entonces existe una combinación lineal no trivial igualada a cero:

$$\lambda_1\mathbf{v}+\cdots+\lambda_\ell\mathbf{v}_\ell=0$$

con algún $\lambda_i\neq 0$, $1\leq i\leq \ell$. Anadimos nuevos vectores, digamos $\mathbf{v}_{\ell+1},\dots,\mathbf{v}_{\ell+r}$. Entonces seguimos teniendo combinación lineal no trivial igualada a cero

$$\lambda_1\mathbf{v}+\cdots+\lambda_\ell\mathbf{v}_\ell+0\mathbf{v}_{\ell+1}+\cdots+0\mathbf{v}_{\ell+r}=0$$

$\square$

Tarea 18.

(1) *Demostrar que los vectores* $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ *y* $(1,1,1)$ *son linealmente independientes.*
(2) *Generalizar a* $\mathbb{R}^n$ *el ejercicio anterior.*
(3) *Probar que los vectores en* $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0,0,\ldots,1)$$

son linealmente independientes.
(4) *Probar que los vectores en* $\mathbb{R}^2$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(3,2)$ *forman un conjunto linealmente dependiente.*
(5) *Determinar si el conjunto dado es linealmente independiente o dependiente.*
 (a) $(-3,1)$, $(6,4)$
 (b) $(1,3)$, $(-2,-6)$
 (c) $(-1,2,1)$, $(2,-4,3)$
 (d) $(1,-4,3)$, $(3,-11,2)$, $(1,-3,-4)$
 (e) $(1,4,-1,3)$, $(-1,5,6,2)$, $(1,13,4,7)$.

Propiedad 11. *Un sistema de ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \cdots & + & a_{1n}y_n & = & 0 \\ a_{21}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \cdots & + & a_{2n}y_n & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}y_1 & + & a_{m2}y_2 & + & \cdots & + & a_{mn}y_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{23}$$

tiene como única solución $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0 \Leftrightarrow$ *los vectores columna*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{24}$$

son linealmente independientes.

Demostración.

($\Rightarrow$) Tenemos que demostrar que los vectores columna (24) son linealmente independientes. Supongamos

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1n}\lambda_n \\ a_{21}\lambda_1 + \cdots + a_{2n}\lambda_n \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + \cdots + a_{mn}\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

igualando coordenadas obtenemos

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1n}\lambda_n &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \cdots + a_{2n}\lambda_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + \cdots + a_{mn}\lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

lo que significa que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son soluciones del sistema de ecuaciones (23). Pero por hipótesis, tal sistema sólo tiene una solución $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

Por lo tanto, los vectores columna (24) son linealmente independientes.

($\Leftarrow$) Desde luego $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ son soluciones al sistema (23). veamos que esta es la única solución.

Supongamos que $z_1, \ldots, z_n$ son soluciones al sistema (23); es decir,

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}z_1 & + & a_{12}z_2 & + & \cdots & + & a_{1n}z_n & = & 0 \\ a_{21}z_1 & + & a_{22}z_2 & + & \cdots & + & a_{2n}z_n & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}z_1 & + & a_{m2}z_2 & + & \cdots & + & a_{mn}z_n & = & 0 \end{array}$$

esto es

$$z_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + z_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que implica que $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$ pues los vectores columna (24) son linealmente independientes. Así, la solución trivial es la única solución del sistema.

□

6. Bases

DEFINICIÓN 56. *Un conjunto de vectores* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *forman una* **base** *de un subespacio vectorial* W *de* $\mathbb{R}^n$ *si*

(1) $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ *es linealmente independiente;*
(2) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ *generan a* W*, es decir,*

$$W = \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$$

En tal caso se dice que ℓ *es la* **dimensión** *de* W *y se pone*

$$\dim W = \ell.$$

EJEMPLO 57. Sean $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. Probar que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Primero tenemos que demostrar que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente: supongamos que
$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$$
esto es
$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(1,1) = (0,0)$$
luego
$$(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = (0,0)$$
igualando coordenadas obtenemos que
$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$
lo que también implica que $\lambda_1 = 0$. Así, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

(2) Tenemos que demostrar que $\mathbb{R}^2 = \text{gen}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Notemos que la matriz formada por los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ como columnas $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible. Por lo que
$$\mathbb{R}^2 = \text{gen}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$
en particular obtenemos que
$$\dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

□

Ejemplo 58. Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ forman una base para $\mathbb{R}^2$ porque

(1) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es linealmente independiente: supongamos que
$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 = (0,0)$$
entonces
$$(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$$
e igualando coeficientes obtenemos que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$.

(2) $\mathbb{R}^2 = \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ pues que $\mathbb{R}^2 \supseteq \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ es obvio y recíprocamente que $\mathbb{R}^2 \subseteq \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ es porque si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces
$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \in \text{gen}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).$$

En particular obtenemos que $\dim W = 2$.

Tarea 19.

(1) *Sean* $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0,$ $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ *vectores en* $\mathbb{R}^n$. *Probar que* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^n$ *(esta base se llama* **base canónica de** $\mathbb{R}^n$*).*

(2) *Sean* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0 \ldots, 0), \ldots, \mathbf{v}_n = (1, 1, \ldots, 1)$ *vectores en* $\mathbb{R}^n$. *Probar que* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^n$. *Calcular* $\dim R^n$.

(3) *Encuentre otra base de* $\mathbb{R}^n$ *diferente a las dos anteriores.*

Ejemplo 59. Sea
$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 3y - z = 0\}.$$
Probar que

(1) W es subespacio vectorial.

(2) Los vectores $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$ forman una base de W.

Demostración.

(1) (a) $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in W$ porque $2 * 0 + 3 * 0 - 0 = 0$;
(b) si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in W$ entonces

$$\mathbf{u}_1 = (x, y, z) \text{ y } 2x + 3y - z = 0$$
$$\mathbf{u}_2 = (x', y', z') \text{ y } 2x' + 3y' - z' = 0$$

entonces

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (x + x', y + y', z + z')$$

y

$$\begin{aligned} 2(x + x') + 3(y + y') - (z + z') &= (2x + 3y - z) + (2x' + 3y' - z') \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in W.$$

(c) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in W$ entonces $u = (x, y, z)$ y se satisface $2x+3y-z = 0$. Luego $\lambda\mathbf{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ y

$$\begin{aligned} 2\lambda x + 3\lambda y - \lambda z &= \lambda(2x + 3y - z) \\ &= \lambda 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\lambda\mathbf{u} \in W$.

Por definición, se sigue que W es subespacio vectorial.

(2) (a) Primero tenemos que demostrar que $\{(1, 0, 2), (0, 1, 3)\}$ son linealmente independientes. Supongamos que

$$\lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(0, 1, 3) = \mathbf{0}$$

entonces

$$(\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_1 + 3\lambda_2) = (0, 0, 0)$$

igualando coordenadas obtenemos que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$. Por lo tanto los vectores son linealmente independientes.
(b) Por demostrar que $W = \text{gen}((1, 0, 2), (0, 1, 3))$: por contenciones.
(i) $\text{gen}((1, 0, 2), (0, 1, 3)) \subseteq W$: si $\mathbf{u} \in \text{gen}((1, 0, 2), (0, 1, 3))$ entonces

$$\mathbf{u} = \lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(0, 1, 3)$$

pero $(1, 0, 2) \in W$ porque $2 * 1 + 3 * 0 - 2 = 0$ y también $(0, 1, 3) \in W$ porque $2 * 0 + 3 * 1 - 3 = 0$ luego, como W es subespacio , $\lambda_1(1, 0, 2) \in W$ y $\lambda_2(0, 1, 3) \in W$, así como la suma $\mathbf{u} = \lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(0, 1, 3) \in W$.

(ii) $W \subseteq \text{gen}((1,0,2),(0,1,3))$: si $\mathbf{u} \in W$ entonces $u = (x,y,z)$ con $2x+3y-z=0$. Despejando $z = 2x+3y$, por lo que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (x,y,z)\\ &= (x,y,2x+3y)\\ &= (x,0,2x)+(0,y,3y)\\ &= x(1,0,2)+y(0,1,3)\\ &\in \text{gen}((1,0,2),(0,1,3))\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$W = \text{gen}((1,0,2),(0,1,3))$$

□

Tarea 20.

(1) *En* $\mathbb{R}^3$ *se define*

$$S = \{(x,y,z)\,|\,2x-y+5z=0\}.$$

Probar que
 (a) S *es subespacio vectorial.*
 (b) $(1,2,0)$, $(0,5,1)$ *forman una base para* W.

(2) *Lo mismo que el anterior para* $T = \{(x,y,z)\,|\,2x-3y+6z=0\}$ *y* $(-3,0,1)$, $(0,2,1)$.

En $\mathbb{R}^4$ *se define*

$$W = \{(x,y,z,t)\,|\,x+y-z-t=0\}$$

(1) *Demostrar que* W *es subespacio vectorial.*
(2) *Encontrar una base para* W.

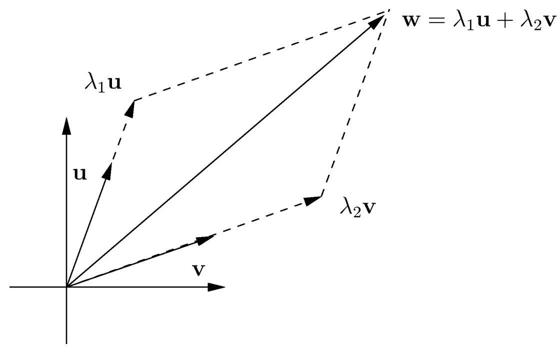
Propiedad 12. *Si* $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_\ell$ *son vectores en* $\mathbb{R}^n$ *entonces* $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_\ell,\mathbf{0}\}$ *es un conjunto linealmente dependiente.*

Demostración. La siguiente es una combinación lineal no trivial:

$$0\mathbf{v}_1+\cdots+0\mathbf{v}_\ell+\underbrace{1}_{\neq 0}\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

□

Si tomamos tres vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ entonces estos forman un conjunto linealmente dependiente porque si alguno de ellos es cero, entonces, por la propiedad inmediata anterior, se tiene que son dependientes. Si ninguno de ellos es cero entonces, encogiendo o alargando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ podemos alcanzar con sumas a $\mathbf{w}$ como se ve en el dibujo:



Esta situación se puede generalizar.

Teorema 10. *Si W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por r vectores entonces cualquier conjunto de $r+1$ vectores en W es linealmente dependiente.*

Demostración. Por inducción matemática sobre r.

(1) Caso base $r = 1$: Tenemos que demostrar que si W es generado por un vector, entonces cualquier conjunto de 2 vectores en W es linealmente dependiente.

Pongamos
$$W = \text{gen}(\mathbf{v}) = \{\lambda\mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
y sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ dos vectores en W. Si $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ o $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ entonces $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es linealmente dependiente. En caso contrario $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}$. Luego como $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in W$ entonces
$$\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{v}$$
con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$. Por lo que
$$\lambda_2\mathbf{u}_1 = \lambda_2\lambda_1\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_2$$
de donde
$$\lambda_2\mathbf{u}_1 - \lambda_1\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$
que es una combinación lineal no trivial, por lo que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es linealmente dependiente.

(2) Hipótests de inducción: supongamos cierto el resultado para r.

(3) Demostraremos el resultado para $r + 1$:
$$W = \text{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r+1})$$
y tomamos $r + 2$ vectores en W:
$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{r+2} \in W.$$
Tenemos que probar que estos vectores son linealmente dependientes.

Podemos poner
$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{u}_1 & = & \lambda_{11}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{1r}\mathbf{v}_r & + & \mu_1\mathbf{v}_{r+1} \\
\mathbf{u}_2 & = & \lambda_{21}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{2r}\mathbf{v}_r & + & \mu_2\mathbf{v}_{r+1} \\
 & \vdots & & & & & & & \\
\mathbf{u}_{r+2} & = & \lambda_{r+2,1}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{r+2,r}\mathbf{v}_r & + & \mu_{r+2}\mathbf{v}_{r+1}
\end{array}$$

Caso: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{r+2} = 0$. Entonces $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{r+2} \in \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ que es un subespacio generado por r vectores. Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{r+1}$ son linealmente dependientes, luego $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{r+1}, \mathbf{u}_{r+2}$ también son linealmente dependientes.

Caso $\exists \mu_i \neq 0$. Reordenando

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{u}_i & = & \lambda_{i1}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{ir}\mathbf{v}_r & + & \mu_i\mathbf{v}_{r+1} \\
\mathbf{u}_{i+1} & = & \lambda_{(i+1)1}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{(i+1)r}\mathbf{v}_r & + & \mu_{i+1}\mathbf{v}_{r+1} \\
 & \vdots & & & & & & & \\
\mathbf{u}_{r+2} & = & \lambda_{r+2,1}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{r+2,r}\mathbf{v}_r & + & \mu_{r+2}\mathbf{v}_{r+1} \\
\mathbf{u}_1 & = & \lambda_{11}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{1r}\mathbf{v}_r & + & \mu_1\mathbf{v}_{r+1} \\
 & \vdots & & & & & & & \\
\mathbf{u}_{i-1} & = & \lambda_{(i-1)1}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda_{(i-1)r}\mathbf{v}_r & + & \mu_{i-1}\mathbf{v}_{r+1}
\end{array}$$

con $\mu_i \neq 0$. Si renombramos,

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{u}'_1 & = & \lambda'_{11}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda'_{1r}\mathbf{v}_r & + & \mu'_1\mathbf{v}_{r+1} \\
\mathbf{u}'_2 & = & \lambda'_{21}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda'_{2r}\mathbf{v}_r & + & \mu'_2\mathbf{v}_{r+1} \\
 & \vdots & & & & & & & \\
\mathbf{u}'_{r+2} & = & \lambda'_{r+2,1}\mathbf{v}_1 & + & \cdots & + & \lambda'_{r+2,r}\mathbf{v}_r & + & \mu'_{r+2}\mathbf{v}_{r+1}
\end{array}$$

con $\mu' \neq 0$. En particular

$$\{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_{r+2}\} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{r+2}\}. \tag{25}$$

Similarmente al caso base consideramos y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mu'_2\mathbf{u}'_1 - \mu'_1\mathbf{u}'_2 \in \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) \\
\mathbf{w}_2 &= \mu'_3\mathbf{u}'_1 - \mu'_1\mathbf{u}'_3 \in \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_{r+1} &= \mu'_{r+2}\mathbf{u}'_1 - \mu'_1\mathbf{u}'_{r+2} \in \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)
\end{aligned}$$

es decir, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r+1} \in \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$. Luego podemos aplcar, de nuevo, la hipótesis de inducción para obtener que $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r+1}$ son linealmente dependientes. Por lo que existe

$$\alpha_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_{r+1}\mathbf{w}_{r+1} = \mathbf{0}$$

con algún $\alpha_j \neq 0$. Es decir

$$\alpha_1(\mu'_2\mathbf{u}'_1 - \mu'_1\mathbf{u}'_2) + \alpha_2(\mu'_3\mathbf{u}'_1 - \mu'_1\mathbf{u}'_3) + \cdots + \alpha_{r+1}(\mu'_{r+2}\mathbf{u}'_1 - \mu'_1\mathbf{u}'_{r+2}) = \mathbf{0}$$

desarrollando,

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1\mu'_2 + \alpha_2\mu'_3 + \cdots + \mu'_{r+2}\alpha_{r+1})\mathbf{u}'_1 \\
&\qquad + (-\alpha_1\mu'_1)\mathbf{u}'_2 + (-\alpha_2\mu'_1)\mathbf{u}'_3 + \cdots + (-\alpha_{r+1}\mu'_1)\mathbf{u}'_{r+2} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Como en algún lugar aparece el coeficiente $-\alpha_j\mu'_1 \neq 0$ tenemos una combinación lineal no trivial. Por lo tanto $\{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_{r+2}\}$ es linealmente dependiente. Y por (25) obtenemos el resultado.

$\square$

Corolario 1. *Si W es un subespacio tal que* $\dim W = n$, *entonces cualquier conjunto en W con más de n elementos es linealmente dependiente.*

Demostración. Como $\dim W = n$ entonces existe una base con n elementos: $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. En particular

$$W = \text{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

por lo que, según el teorema anterior, si se toman más de n elementos en W éstos resultan linealmente dependientes. □

Ejemplo 60. Determinar si el conjunto de vectores

$$\{(1,0,1), (-1,4,3), (2,8,5), (7,6,1), (9,-4,8)\}$$

es linealmente independiente ó no.

Sol. Este es un conjunto de 5 vectores en $\mathbb{R}^3$ que tiene dimensión 3, entonces por el corolario, el conjunto de vectores es linealmente dependiente.

Tarea 21.

(1) *Determinar si los conjuntos de vectores son linealmente independientes ó no.*
   (a) $\{(1,3), (-2,-6)\}$
   (b) $\{(-3,1), (6,4)\}$
   (c) $\{2,1), (-6,-3)\}$
   (d) $\{(-1,2,1), (2,-4,3)\}$
   (e) $\{(1,-4,3), (3,-11,2), (1,-3,-4)\}$
(2) *Determinar si el conjunto dado es una base para el* $\mathbb{R}^n$ *dado*
   (a) $\{(-1,1), (1,2)\}$ *para* $\mathbb{R}^2$.
   (b) $\{(-1,3,1), (2,1,4)\}$ *para* $\mathbb{R}^3$.
   (c) $\{(2,1,-3), (4,0,2), (2,-1,3)\}$ *para* $\mathbb{R}^3$.
   (d) $\{(2,1,0,2), (2,-3,1,0), (3,2,0,0), (5,0,0,0)\}$ *para* $\mathbb{R}^4$.

La definición de *base* contiene dos condiciones: independencia lineal y generación. Si de antemano tenemos que se cumple la segunda condición podemos obtener la primera eliminando los elementos linealmente dependientes. Con esta idea se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 11 (Técnica de exclusión). *Sea W un subespacio vectorial tal que*

$$W = \text{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$$

con cada $\mathbf{v}_i$ no cero. Entonces, si se extraen los vectores $\mathbf{v}_i$ que son linealmente dependientes de sus predecesores, se obtiene una base para W.

Lo anterior da lugar a la llamada *técnica de exclusión en* $\mathbb{R}^n$:

Algoritmo:
Entrada: $W = \text{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$ subespacio;
Salida: una base de W.
Procedimiento()
Formar la matriz A con vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ como columnas
Reducir A a una forma escalonada E por el método de Gauss
Los vectores de las columnas de A que dan lugar a pivotes de E forman una base de W

Ejemplo 61. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por

$$\mathbf{v}_1 = (1,-1,0,2,1), \quad \mathbf{v}_2 = (2,1,-2,0,0), \quad \mathbf{v}_3 = (0,-3,2,4,2)$$
$$\mathbf{v}_4 = (3,3,-4,-2,-1), \quad \mathbf{v}_5 = (2,4,1,0,1), \quad \mathbf{v}_6 = (5,7,-3,-2,0)$$

Encontrar una base de W y calcular la dimensión de W.

Sol. Usamos la técnica de exclusión.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & 6 & 12 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & -8 & -4 & -12 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que una base de W es $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$. En particular, $\dim W = 3$.

Tarea 22. *En cada inciso considere a W como el subespacio vectorial generado por la lista de vectores dada. Calcule, en cada caso* $\dim W$ *y encuente una base para W.*

(1)
$$\mathbf{v}_1 = (5,4,3), \quad \mathbf{v}_2 = (2,1,6), \quad \mathbf{v}_3 = (4,5,-12)$$
$$\mathbf{v}_4 = (6,1,4), \quad \mathbf{v}_5 = (1,1,1)$$

(2)
$$\mathbf{v}_1 = (0,1,1,2), \quad \mathbf{v}_2 = (-3,-2,4,5), \quad \mathbf{v}_3 = (1,2,0,1)$$
$$\mathbf{v}_4 = (-1,4,6,11), \quad \mathbf{v}_5 = (1,1,1,3), \quad \mathbf{v}_6 = (3,7,3,9)$$

(3)
$$\mathbf{v}_1 = (3,1,2,4,1), \quad \mathbf{v}_2 = (3,-2,6,7,-3), \quad \mathbf{v}_3 = (3,4,-2,1,5)$$
$$\mathbf{v}_4 = (1,2,3,2,1), \quad \mathbf{v}_5 = (7,1,11,13,-1), \quad \mathbf{v}_6 = (2,-1,2,3,1)$$

(4)
$$\mathbf{v}_1 = (1,4,-1,3), \quad \mathbf{v}_2 = (-1,5,6,2), \quad \mathbf{v}_3 = (1,13,4,7)$$

Antes hemos visto que, en general un espacio vectorial puede tener más de una base. De hecho, no es difícil demostrar que, para un espacio vectorial dado, este tiene una infinidad de bases (excepto el espacio vectorial cero $\{\mathbf{0}\}$). Sin embargo, lo que nunca cambia es el número de elementos que forma una base; que es lo que muestra el siguiente teorema.

Teorema 12. *La dimensión de un subespacio es única.*

Demostración. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}, \quad \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$$

dos bases de W. Por demostrar que $m = s$.

Tenemos que

$$W = \mathrm{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$$

y $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ vectores en W. Si $s > m$ tenemos más vectores que generadores, entonces por el teorema 10 obtenemos que $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ son linealmente dependientes: contradicción, pues tales vectores forman una base. Por lo tanto

$$s \leq m. \tag{26}$$

De forma similar, podemos poner

$$W = \mathrm{gen}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s)$$

y de nuevo, como $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ son vectores en W, si $m > s$ entonces $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente dependientes: contradicción, pues tales vectores forman una base. Por lo que

$$m \leq s. \tag{27}$$

De (26) y (27) obtenemos que

$$m = s.$$

□

Definición 62. *El subespacio cero* $\{\mathbf{0}\}$ *tiene como base al conjunto* $\varnothing$*, y por tanto* $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

Gracias a ésta definición se puede probar que

Teorema 13. *Todo subespacio tiene una base.*

Tal teorema garantiza que ejercicios como el que sigue tienen solución.

Ejemplo 63. Hallar una base del subespacio

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\}$$

Sol. Una solución no cero de la ecuación

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$$

es $x_3 = 0$, $x_2 = 2$, $x_1 = -1$, es decir, $(-1, 2, 0) \in S$. También, otra solución no trivial de la misma ecuación es $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_1 = 5$, por lo que $(5, 0, 2) \in S$. Así, $(-1, 2, 0)$ y $(5, 0, 2)$ pertenecen a S y son linealmente independientes. Como S es un plano en $\mathbb{R}^3$, obtenemos que $\dim S = 2$, por lo que

$$(-1, 2, 0), \quad (5, 0, 2)$$

forman una base para W.

Tarea 23. *Halle una base para los subespacios siguientes.*

(1) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
(2) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 + x_2 = 0, x_2 = x_4, x_5 = x_1 + 3x_3\}$

Teorema 14. *Sea* W *subespacio de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces, todo conjunto linealmente independiente de vectores de* W *se puede extender a una base de* W*.*

Demostración. Sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ un conjunto de vectores en W linealmente independiente.

Según el teorema 13, el subespacio W debe de tener una base. Sea ésta $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$. En particular

$$W = \text{gen}(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s)$$

es decir,

$$\forall w \in W, w = \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{w}_s$$

en particular

$$w = 0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_\ell + \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{w}_s$$

lo que implica que

$$W = \text{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s)$$

y se aplica la técnica de exclusión a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$, lo cual no va a excluir a ningún $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ pues éstos son linealmente independientes, aunque, posiblemente se añaden algunos $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$. □

Ejemplo 64. Expandir el conjunto linealmente independiente $\{(1, 1, 0), (-1, 2, 0)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$.

Sol. Tenemos los vectores

$$(1, 1, 0), \quad (-1, 2, 0)$$

linealmente independientes. Por otro lado tenemos

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

la base canónica de $\mathbb{R}^3$, luego

$$\mathbb{R}^3 = \text{gen}((1, 1, 0), (-1, 2, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

y aplicamos la técnica de exclusión:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$(1, 1, 0), (-1, 2, 0), (0, 0, 1)$$

forman una base para $\mathbb{R}^3$.

Tarea 24. *Extienda las bases encontradas en la tarea 23 a bases del $\mathbb{R}^n$ dado.*

7. Nulidad y Rango de una Matriz

Definición 65. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

una matriz $m \times n$.

(1) *El* **espacio columna de** A *es:*

$$\mathrm{gen}(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix})$$

esto es, el espacio columna de A es el subespacio generado por las columnas de la matriz A.

(2) *El* **espacio nulo** *ó* **núcleo** *de A es*

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

(3) *El* **rango** *de A es la dimensión del espacio columna de A.*

Supongamos que queremos encontar el rango de A. Tenemos que calcular la dimensión del espacio columna de A, y para hacer esto se puede obtener una base de

$$\mathrm{gen}(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix})$$

para lo cual aplicamos la técnica de exclusión a las columnas de A, i.e., a la matriz A le aplicamos el método de Gauss y queda una forma escalonada E que hace corresponder a los pivotes ($\neq 0$) una base:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 1 & *\cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & *\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & \end{pmatrix} = E$$

luego el número de éstos pivotes es la dimensión del espacio columna, es decir, el rango. Nótese que también el rango es el número de filas no cero de la forma escalonada E.

Teorema 15. *El rango de una matriz A es el número de filas no cero de la forma escalonada de A.*

Propiedad 13. *El núcleo* $\ker A$ *de una matriz A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración.

(1) $\mathbf{0} \in \ker A$ pues $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(2) si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ están en $\ker A$ entonces

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

luego

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$= \mathbf{0} + \mathbf{0}$$
$$= \mathbf{0}$$

lo que indica que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \ker A.$$

(3) si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker A$ entonces

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

por lo que

$$A(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = \lambda A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$= \lambda\mathbf{0}$$
$$= \mathbf{0}$$

es decir,

$$\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker A$$

□

Por la propiedad anterior tiene sentido la siguiente definición:

Definición 66. *La* **nulidad** *de una matriz A es*

$$nul(A) = \dim \ker A.$$

Sea A una matriz y consideremos el sistema de ecuaciones homogéneo

$$AX = \mathbf{0} \tag{28}$$

donde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es vector de incógnitas del sistema. Entonces el número de *variables libres* de (28) es la nulidad de A.

Se puede demostrar además que

TEOREMA 16. *La nulidad de una matriz A es el número de variables libres del sistema* (28) *que es también el número de columnas sin pivotes de la forma escalonada de A.*

EJEMPLO 67. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

(1) Calcular rango A y nul A.
(2) Encontrar una base para el espacio columna.
(3) Encontrar una base para el espacio nulo.

SOL.

(1)

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos notar que los pivotes aparecen en las columnas 1,2 y 4. Por lo que el rango de A es 3. Mientras que las columnas sin pivotes son la 3, y la 5, por lo que la nulidad es 2:

$$\operatorname{ran} A = 3, \operatorname{nul} A = 2.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(3) Consideremos $AX = \mathbf{0}$, luego, por los cáculos anteriores (forma escalonada de A) tenemos que tal sistema homogéneo es equivalente a

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & & & 3x_4 & - & 9x_5 & = & 0 \end{array}$$

de donde x_5 es libre; x_4 no lo es:

$$x_4 = 3x_5$$

x_3 es libre; pero x_2 no:

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 - 2x_4 + 2x_5 \\ &= -x_3 - 4x_5 \end{aligned}$$

x_1 tampoco el libre:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 + x_4 - x_5 \\ &= 2x_3 + 8x_5 + 3x_5 - x_5 \\ &= 2x_3 + 10x_5 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2x_3 + 10x_5 \\ -x_3 - 4x_5 \\ x_3 \\ 3x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10x_5 \\ -4x_5 \\ 0 \\ 3x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ &= x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forman una base para $\ker A$.

□

El siguiente teorema es inmediato.

TEOREMA 17. *Si A es una matriz $m \times n$ entonces*

$$n = \textit{rango } A + \textit{nul } A$$

TAREA 25. *Hallar*

(1) *el rango de la matriz dada;*
(2) *una base para el espacio columna;*
(3) *una base para el espacio nulo.*

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

CAPíTULO 3

Espacios Vectoriales

1. Definición y ejemplos

Definición 68. *Un* **espacio vectorial** V *es un conjunto junto con dos operaciones* $+, *$ *tales que*

A0 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ *(cerradura);*
A1 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(asociativa)*
A2 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ *(conmutativa)*
A3 $\exists \mathbf{0} \in V$ *tal que* $\forall \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$
A4 $\forall \mathbf{v} \in V$ $\exists - \mathbf{v} \in V$ *tal que* $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

además

E0 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall \mathbf{v} \in V$, $\lambda * \mathbf{v} \in V$ *(cerradura)*
E1 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{u}, \forall \mathbf{v} \in V$, $\lambda * (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda * \mathbf{u} + \lambda * \mathbf{v}$ *(distributiva derecha)*
E2 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\forall \mathbf{u} \in V$, $(\lambda + \mu) * \mathbf{u} = \lambda * \mathbf{u} + \mu * \mathbf{u}$ *(distributiva izquierda)*
E3 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\forall \mathbf{u} \in V$, $\lambda * (\mu * \mathbf{u}) = (\lambda\mu) * \mathbf{u}$ *(asociativa)*
E4 $1 \in \mathbb{R}$ $\forall u \in V$, $1 * \mathbf{u} = \mathbf{u}$ *(preservación de escala)*

En lo que sigue denotaremos la operación "*" por yuxtaposición. Esto es, pondremos

$$\lambda \mathbf{u} = \lambda * \mathbf{u}.$$

Ejemplo 69. $\mathbb{R}^n$ junto con las operaciones de suma de vectores y producto de escalares por vectores es un espacio vectorial.

Ejemplo 70. $M(m,n)$ que denota al conjunto de matrices $m \times n$ junto con la suma de matrices y producto por escalares

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

es un espacio vectorial.

Ejemplo 71. Los números complejos $\mathbb{C}$ con la suma de números complejos y el producto por número reales usual, es un espacio vectorial.

Ejemplo 72. *Sea* $\mathcal{F}$ *el conjunto de funciones de variable real, esto es,*

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ función}\}$$

entonces $\mathcal{F}$ *es un espacio vectorial junto con la suma: si* $f, g \in \mathcal{F}$,

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

y producto por escalares: si $\lambda \in R$ *y* $f \in \mathcal{F}$, *entonces*

$$\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Ejemplo 73. *Los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y variable t, denotados $\mathbb{R}[t]$, con la suma de polinomios y producto por reales usual, es un espacio vectorial.*

A los elementos de un espacio vectorial les llamaremos **vectores** y a los elementos de $\mathbb{R}$ **escalares**.

Ejemplo 74. *Las funciones* sin, cos *son vectores en el espacio vectorial de las funciones de variable real, mientras que la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *es un vector en el espacio vectorial* $M(2,2)$*, y* $(1,3,-2,5,0)$ *es vector en* $\mathbb{R}^5$

Tarea 26.

(1) *Decidir si el conjunto dado, junto con las operaciones indicadas es o no un espacio vectorial real.*
  (a) *El conjunto $\mathbb{R}^2$ con la suma usual pero con multiplicación por escalares definida por*
  $$\lambda(x,y) = (\lambda y, \lambda x)$$
  (b) *El conjunto $\mathbb{R}^2$ con la multiplicación escalar usual, pero con la suma definida por*
  $$(x,y) + (r,s) = (y+s, x+r)$$
  (c) *El conjunto $\mathbb{N}$ de los número naturales con las operaciones usuales de suma y producto.*
  (d) *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los número racionales con las operaciones usuales de suma y producto.*

La mayoría de los conceptos que se introdujeron para $\mathbb{R}^n$ se pueden extender a cualquier espacio vectorial. Por ejemplo:

Definición 75. *Sea V un espacio vectorial y $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V$. Entonces*
$$\mathit{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell) = \{\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_\ell\mathbf{v}_\ell \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}\}$$
es el **subespacio generado** *por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$.*

Ejemplo 76. En el espacio vectorial de la funciones de variable real se cumple que
$$\sinh(x) \in \mathrm{gen}(e^x, e^{-x})$$

Ejemplo 77. En el espacio vectorial $\mathbb{C}$ se cumple que
$$e^{i\pi/2} \in \mathrm{gen}(1, i)$$

Definición 78. *Sea V un espacio vectorial y $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V$.*

(1) *Se dice que* **v depende linealmente de** $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ *si*
$$\mathbf{v} \in \mathit{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell)$$
(2) *Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ se dice* **linealmente dependiente** *si al menos algún $\mathbf{v}_i$ depende de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_\ell$.*
(3) *Un conjunto de vectores se dice* **linealmente independiente** *si no es linealmente dependiente.*

Ejemplo 79. En el espacio vectorial de las funciones de variable real, las funciones $\sinh(x)$, e^x, e^{-x} son linealmente dependientes pues la siguiente es una combinación lineal no trivial

$$\sinh(x) - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 80. En el espacio vectorial $\mathbb{C}$ los elementos $e^{i\phi/4}, 1, i$ son linealmente dependientes pues la siguiente es también una combinación lineal no trivial:

$$e^{i\pi/4} - \frac{1}{\sqrt{2}}1 - \frac{1}{\sqrt{2}}i = 0$$

Ejemplo 81. En $M(2,2)$ las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes. En efecto, supongamos

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_4 = 0$.

Ejemplo 82. Las funciones cos y sin son linealmente dependientes en el espacio vectorial de las funciones de variable real, pues si

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces derivando

$$-\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0$$

Tales ecuaciones forman un sistema de ecuaciones con incógnitas λ_1, λ_2. Luego, por la regla de Cramer

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ 0 & \cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{0}{1} = 0$$

y

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix}} = \frac{0}{1} = 0$$

Tarea 27. (1) *Determinar si el subconjunto indicado es un subespacio del espacio vectorial dado.*
   (a) *El conjunto de todos los polinomios de grado mayor que 3 en el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes en* $\mathbb{R}$.
   (b) *El conjunto de todas las funciones f de variable real tales que $f(0) = 1$ en el espacio vectorial $\mathcal{F}$ de todas las funciones de variable real.*
   (c) *El conjunto de todas las funciones f de variable real tales que $f(1) = 0$ en el espacio vectorial $\mathcal{F}$ de todas las funciones de variable real.*

(2) *Sea $\mathcal{F}$ es espacio vectorial de las funciones de variable real. Demostar que $gen(\sin^2(x), \cos^2(x))$ contiene a todas las funciones constantes.*
(3) *En el espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{R}[t]$ demostrar que*

$$gen(1, t) = gen(1 + 2t, t)$$

(Sugerencia: demostrar que cada uno de estos subespacios es subconjunto del otro)
(4) *Sea V un espacio vectorial y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vectores en V. Demostrar que*
  (a) $gen(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = gen(\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$
  (b) $gen(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = gen(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$
(5) *Decidir si el conjunto de vectores es independiente o dependiente:*
  (a) $\{t^2 - 1, t^2 + 1, 4t, 2t - 3\}$ *en* $\mathbb{R}[t]$.
  (b) $\{1, t, t^2\}$ *en* $\mathbb{R}[t]$
  (c) $\{1, \sin^2 x, \cos(2x), \cos^2 x\}$ *en* $\mathcal{F}$.

También la noción de *subespacio* tiene sentido en cualquier espacio vectorial.

Definición 83. *Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto W de V se llama* **subespacio vectorial** *de V si cumple:*
(1) $\mathbf{0} \in W$;
(2) *cerradura de la suma: si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$;*
(3) *cerradura del producto por escalares: si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in W$ entonces $\lambda\mathbf{w} \in W$.*

Ejemplo 84. Sea $\mathcal{P}_2[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes reales en variable x de grado a lo más 2. Esto es,

$$\mathcal{P}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces $\mathcal{P}_2[x]$ es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$ pues
(1) el polinomio cero[1] $0 = 0 + 0x + 0x^2 \in \mathcal{P}_2[x]$;
(2) cerradura de suma:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2)&\\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in \mathcal{P}_2[x];\end{aligned}$$

(3) cerradura del producto por escalares: si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 \in \mathcal{P}_2[x].$$

Tarea 28. (1) *Determinar si W es subespacio de V.*
  (a) $V = \mathbb{R}^3$,
$$W = \{(a, -a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$
  (b) $V = \mathbb{R}^3$,
$$W = \{(a, b, |a|) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$
  (c) $V = M(2, 2)$ *el espacio vectorial de las matrices* 2×2,
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

---

[1]Algunos autores conideran que el polinomio cero no tiene grado, otros dicen que el polinomio cero tiene *todos los grados*, pero aquí se considera que el grado del polinomio cero es $-\infty$.

(d) $V = M(n,n)$,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) $V = \mathcal{P}_2[x]$,

$$W = \{a + bx + cx^2 \mid a + b + c = 0\}.$$

(f) $V = \mathcal{P}_2[x]$,

$$W = \{a + bx + cx^2 \mid abc = 0\}.$$

(g) $V = \mathcal{F}$,

$$W = \{f \in \mathcal{F} \mid f(-x) = f(x)\}.$$

(h) $V = \mathcal{F}$,

$$W = \{f \in \mathcal{F} \mid f(-x) = -f(x)\}.$$

(i) $V = \mathcal{F}$,

$$W = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ es derivable y } f'(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}.$$

(2) *Sea V un espacio vectorial con subespacios U y W. Demuestre que $U \cap W$ es subespacio vectorial de V.*

TEOREMA 18 (Herencia). *Sea V un espacio vectorial. Si W es subespacio vectorial de V entonces W es espacio vectorial de V.*

DEFINICIÓN 85. *Sea A una matrix $n \times n$. La matriz A se dice* **simétrica** *si $A^t = A$, donde A^t es la matriz transpuesta de A.*

EJEMPLO 86. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

es simétrica, pues al transponerla,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

EJEMPLO 87. *Mostrar que W el conjunto de todas las matrices $n \times n$ simétricas es espacio vectorial.*

SOL. Probaremos que W es subespacio de $M(n,n)$.

(1) La matriz cero

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

es evidentemente simétrica, i.e., $0 \in W$.

(2) Cerradura de la suma: si $A, B \in W$ entonces $A^t = A$ y $B^t = B$, luego

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$$

por tanto $A+B$ es simétrica y $A+B \in W$.

(3) Cerradura del porducto por escalares: si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in W$, entonces $A^t = A$ y

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$$

i.e., $\lambda A \in W$.

Luego, por herencia, W es espacio vectorial. $\square$

También los espacios vectoriales tienen bases.

Teorema 19. *Todos los espacios vectorales tienen una base. Así, cada espacio vectorial tiene una dimensión.*

Ejemplo 88. Muestre $\{1, x, x^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2[x]$ y calcule dim $\mathcal{P}_2[x]$.

Demostración.

(1) Independencia: supongamos que

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

entonces, por igualdad de polinomios, los coefientes tienen que ser iguales: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.

(2) Generación: si $p(x) \in \mathcal{P}_2[x]$, entonces,

$$p(x) = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2.$$

es decir, $\mathcal{P}_2[x] = gen(1, x, x^2)$.

Luego como la base $\{1, x, x^2\}$ tiene tres elementos, dim $\mathcal{P}_2[x] = 3$. $\square$

Definición 89. *Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \big(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\big)$ una base ordenada de V. Si $\mathbf{v} \in V$ y*

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$

entonces el vector

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

se llama **vector coordenado de v con respecto a la base** $\mathcal{B}$. *Notación:*

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Ejemplo 90. En $\mathbb{R}^2$ consideramos el vector $\mathbf{v} = (-1, -8)$. El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ tiene base ordenada $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$; también tiene base ordenada $\mathcal{B}_2 = \big((1,-1), (1,2)\big)$. Otras bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ son $\mathcal{B}_3 = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ y $\mathcal{B}_4 = \big((1,2), (1,-1)\big)$ Entonces, como

$$(-1,-8) = -1\mathbf{e_1} + (-8)\mathbf{e}_2$$

entonces

$$(-1,-8)_{\mathcal{B}_1} = (-1,-8)$$

también

$$(-1,-8) = 2(1,-1) + (-3)(1,2)$$

luego

$$(-1,-8)_{\mathcal{B}_2} = (2,-3).$$

También, de que

$$(-1,-8) = (-8)\mathbf{e}_2 + (-1)\mathbf{e_1}$$

se obtiene que

$$(-1,-8)_{\mathcal{B}_3} = (-8,-1)$$

y de que

$$(-1,-8) = (-3)(1,2) + 2(1,-1)$$

se tiene que

$$(-1,-8)_{\mathcal{B}_4} = (-3,2).$$

Ejemplo 91. Hallar el vector coordenado de $(1,2,-2)$ con respecto a la base ordenada

$$\mathcal{B} = \big((1,1,1),(1,2,0),(1,0,1)\big).$$

Esto es, calcular $(1,2,-2)_{\mathcal{B}}$.

Sol. Tenemos que existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que

$$(1,2,-2) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,2,0) + \lambda_3(1,0,1).$$

Calculemos tales. Se debe de cumplir

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 \\ 2 & = & \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & \\ -2 & = & \lambda_1 & & & + & \lambda_3 \end{array}$$

y resolvemos usando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

de donde $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$. Por lo que

$$\boxed{(1,2,-2)_{\mathcal{B}} = (-4,3,2)}.$$

□

Ejemplo 92. Encontrar el vector coordenado $p(x)_{\mathcal{B}}$ de $p(x) = 2 - 3x + 5x^2$ con respecto a la base canónica ordenada $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ de $\mathcal{P}_2[x]$.

Sol. Tenemos que

$$p(x) = 2 * 1 + (-3)x + 5x^2$$

entonces

$$\boxed{p(x)_{\mathcal{B}} = (2,-3,5)}$$

□

Ejemplo 93. Calcular $p(x)_{\mathcal{B}}$ donde $p(x) = 1+2x-x^2$ y $\mathcal{B} = (1+x, x+x^2, 1+x^2)$ es base ordenada de $\mathcal{P}_2[x]$.

Sol. Tenemos que encontrar escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que
$$p(x) = \lambda_1(1+x) + \lambda_2(x+x^2) + \lambda_3(1+x^2)$$
i.e.,
$$1 + 2x - x^2 = \lambda_1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 + \lambda_3 x^2$$
siendo esta ecuación equivalente a, agrupando términos semejantes,
$$1 + 2x - x^2 = (\lambda_1 + \lambda_3) + (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_2 + \lambda_3)x^2$$
luego, igualando coeficientes:
$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & & & \lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & -1 \end{array}$$
que es un sistemas de ecuaciones que se puede resolver por el método de Gauss para obtener
$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$$
es decir
$$p(x) = 2(1+x) + 0(x+x^2) + (-1)(1+x^2)$$
por lo tanto, por definición,
$$\boxed{p(x)_{\mathcal{B}} = (2, 0, -1)}$$
□

Ejemplo 94. Calcular $A_{\mathcal{B}}$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ y
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
es base ordenada de $M(2,2)$.

Sol. Evidentemente, tenemos que
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
entonces, por definición,
$$A_{\mathcal{B}} = (2, -1, 5, 7).$$
□

La idea del vector coordenado es que es la n-ada a la cual se parece un vector general. Por ejemplo, el polinomio $p(x) = 2 - 3x + 5x^2$, se parece al vector $(2, -3, 5)$, de acuerdo al ejemplo 92, respecto a la base $(1, x, x^2)$. Pero también $p(x)$ se parece al vector $(2, 0, 1)$ con respecto a la base $(1+x, x+x^2, 1+x^2)$, según el ejemplo 93. Esta idea después se formalizará con la noción de *isomorfismo*.

Ejemplo 95. Indique si el siguiente conjunto es linealmente independiente o linealmente dependiente. En el segundo caso exprese uno de los vectores como combinación lineal de los otros.
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

SOL. Consideramos la base canónica de $M(2,2)$:

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Luego escribimos los vectores coordenados de los elementos de S con respecto a ésta base

$$S'=\{(1,2,2,1),(2,1,1,2),(1,3,-3,1),(2,3,3,1),(1,2,3,2)\}$$

y aplicamos la técnica de excluisón a estos. Hacemos

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2&1\\2&1&3&3&2\\2&1&-3&3&3\\1&2&1&1&2\end{pmatrix}$$

que al aplicarle el método de Gauss queda

$$A\sim\begin{pmatrix}1&2&1&2&1\\0&1&-1/3&1/3&0\\0&0&1&0&-1/6\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\tag{29}$$

luego el último vector es combinación lineal de los otros y así S es linealmente dependiente. De hecho, si proponemos,

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix}$$

queda un sistema de ecuaciones que corresponde a la forma escalonada de (29), esto es

$$\begin{array}{ccccccccc}\lambda_1&+&2\lambda_2&+&\lambda_3&+&2\lambda_4&=&1\\&&\lambda_2&-&(1/3)\lambda_3&+&(1/3)\lambda_4&=&0\\&&&&\lambda_3&&&=&-1/6\\&&&&&&\lambda_4&=&-1\end{array}$$

que tiene solución $\lambda_4=-1$, $\lambda_3=-1/6$, $\lambda_2=5/18$, $\lambda_1=47/18$. Por lo que

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}=\frac{47}{18}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}+\frac{5}{18}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&3\\-3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix}$$

$\square$

TAREA 29.

(1) *Hallar el vector coordenado del vector dado con respecto a la base ordenada indicada.*
(2) $(-2,4)\in\mathbb{R}^2$ *respecto a* $\mathcal{B}=((0,-2),(-1/2,0))$
(3) $(4,6,2)\in\mathbb{R}^3$ *respecto a* $\mathcal{B}=((2,0,0),(0,1,1),(0,0,1))$
(4) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ *con respecto a*

$$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$$

(5) $p(x)=2-x+3x^2$ *con respecto a* $\mathcal{B}=\{1+x,-1+x^2\}$
(6) *Sea* $\mathcal{B}=\{1,t+1,t^2+t,t^3+t^2\}$ *una base para* $\mathcal{P}_3[t]$ *y sea* $p(t)=2-3t+t^2+2t^3$. *Encontrar* $p(t)_{\mathcal{B}}$.

TAREA 30.

(1) *¿Es $M(2,2)$ generado por*
$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}?$$
(2) *¿Es $M(2,2)$ generado por*
$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}?$$
(3) *¿ Es $\mathcal{P}_2[x]$ generado por $\{1+x+2x^2, 2+x+2x^2, -1+x+2x^2\}$?*

(4) *Determine si los conjuntos de matrices son linealmente independientes en $M(2,2)$. Para aquellos que sean linealmente dependientes exprese una de las matrices como combinación lineal de las otras.*

(a)
$$\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 7\end{pmatrix}\right\}$$
(b)
$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$
(5) *Determine si los conjuntos de polinomios son linealmente independientes. Para aquellos que sean linealmente dependientes, exprese uno de los polinomios como una combinación lineal de los otros.*

(a) $\{1+x, 1+x^2, 1-x+x^2\}$ *en* $\mathcal{P}_2[x]$.

(b) $\{x, 2x-x^2, 3x+2x^2\}$ *en* $\mathcal{P}_2[x]$.

(c) $\{2x, x-x^2, 1+x^3, 2-x^2+x^3\}$ *en* $\mathcal{P}_3[x]$.

(6) *Determine si el conjunto $\mathcal{B}$ es base del espacio vectorial V:*

(a) $V = M(2,2)$,
$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}.$$
(b) $V = M(2,2)$,
$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\right\}.$$
(c) $V = M(2,2)$,
$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$$
(d) $V = \mathcal{P}_2[x]$, $\mathcal{B} = \{1-x, 1-x^2, x-x^2\}$.

(e) $V = \mathcal{P}_2[x]$, $\mathcal{B} = \{1, 2-x, 3-x^2, x+2x^2\}$.

(7) *Proporciona una base para el espacio vectorial V y calcule su dimensión.*

(a)
$$V = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$
(b) *Una matriz A se llama* **antisimétrica** *si $A^t = -A$.*
$$V = \{A \in M(2,2) \mid A \text{ es antisimétrica}\}.$$

2. Transformaciones Lineales

La generalización del concepto de vector como n-ada se llama espacio vectorial. También el concepto de matriz se puede generalizar a lo que se llama *transformación lineal*.

DEFINICIÓN 96. *Sean V, W dos espacios vectoriales y $T : V \to W$ función. La función T se llama* **lineal** *o* **transformación lineal** *si se cumple*

(1) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ *(preservación de suma)*
(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{u} \in V$, $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$ *(preservación de producto por escalares)*

El concepto de linealidad no debe de ser extraño. Muchas operaciones son lineales, por ejemplo, la diferenciación y la integración:

EJEMPLO 97.
Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de las funciones de variable real derivables. Entonces $\mathcal{D}$ es un espacio vectorial; de hecho un subespacio de las funciones de variable real $\mathcal{F}$. Definimos

$$T : \mathcal{D} \to \mathcal{F}, \quad T(f) = \frac{df}{dx}$$

entonces T es lineal pues

(1) preservación de suma: si $f, g \in \mathcal{D}$ arbitrarias,

$$\begin{aligned} T(f+g) &= \frac{d(f+g)}{dx} \\ &= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \\ &= T(f) + T(g). \end{aligned}$$

(2) preservación de escalares: si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{D}$ arbitrarios entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda f) &= \frac{d(\lambda f)}{dx} \\ &= \lambda \frac{df}{dx} \\ &= \lambda T(f). \end{aligned}$$

TAREA 31. *Sea $\mathcal{I}$ el espacio vectorial de las funciones integrables y $T : \mathcal{I} \to \mathcal{F}$ funcón definida por $T(f) = \int f dx$ la integral indefinida. Mostrar que T es lineal.*

EJEMPLO 98. Sea $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ la función definida como $\Re(a+ib) = a$. Esto es $\Re z$ es la parte real de z. Demostrar que $\Re$ es lineal.

DEMOSTRACIÓN.

(1) preservación de suma: sean $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \Re((a+ib)+(c+id)) &= \Re((a+c)+(b+d)i) \\ &= a+c \\ &= \Re(a+ib) + \Re(c+id) \end{aligned}$$

(2) preservación de escalares: sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a+bi \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} \Re(\lambda(a+bi)) &= \Re(\lambda a + \lambda bi) \\ &= \lambda a \\ &= \lambda \Re a \end{aligned}$$

□

Tarea 32. *Muestre que la parte imaginaria de un número complejo* $\Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *es función lineal.*

Ejemplo 99. Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo. Entonces la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ es lineal. En efecto:

(1) preservación de suma: si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) \\ &= ax + ay \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

(2) preservación de escalares: sea $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= a(\lambda x) \\ &= \lambda(ax) \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

No todas las funciones son lineales:

Ejemplo 100. La función seno sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es lineal pues no preserva la suma, en general:

$$0 = \sin(\pi/2 + \pi/2) \neq \sin(\pi/2) + \sin(\pi/2) = 2$$

Ejemplo 101. *La función* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ *no es lineal, pues no preserva a los escalares, por ejemplo*

$$64 = g(2 * 4) \neq 2g(4) = 32$$

Ejemplo 102. Determinar si la función $T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x)$ es lineal.

Sol. (1) preservación de sumas: sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} T((a,b) + (c,d)) &= T(a+c, b+d) \\ &= (b+d, a+c) \\ &= (b,a) + (d,c) \\ &= T(a,b) + T(c,d) \end{aligned}$$

(2) preservación de escalares: sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda(a,b)) &= T(\lambda a, \lambda b) \\ &= (\lambda b, \lambda a) \\ &= \lambda(b,a) \\ &= \lambda T(a,b) \end{aligned}$$

□

Tarea 33. *Determinar si la función dada es transformación lineal:*

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x, y) = (x + y, 2y)$.
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(x, y) = (2x, 3x + y, x + y)$.
(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1)$
(4) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *definida por* $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 1, x_3, 1)$.

Ejemplo 103. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ función tal que rota el plano con centro de rotación de origen $(0,0)$ en un ángulo α en sentido contrario a las agujas del relo. Entonces T es lineal.

Demostración. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Entonces podemos escribir a $\mathbf{v}$ como vector columna:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} ||\mathbf{v}|| \cos(\theta) \\ ||\mathbf{v}|| \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y el eje x. Luego

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= \begin{pmatrix} ||\mathbf{v}|| \cos(\theta+\alpha) \\ ||\mathbf{v}|| \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ||\mathbf{v}||(\cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\cos(\alpha)) \\ ||\mathbf{v}||(\sin(\theta)\cos(\alpha) + \cos(\theta)\sin(\alpha)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ||\mathbf{v}||\cos(\theta) \\ ||\mathbf{v}||\sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es decir,

$$T(\mathbf{v}) = A_\alpha \mathbf{v}$$

donde

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

(llamada **m**atriz de rotación). Luego

(1) preservación de suma: sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= A_\alpha(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ &= A_\alpha \mathbf{v}_1 + A_\alpha \mathbf{v}_2 \\ &= T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

(2) preservación de escalares: sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T(\lambda\mathbf{v}) &= A_\alpha \lambda \mathbf{v} \\ &= \lambda A_\alpha \mathbf{v} \\ &= \lambda T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 104. Determinar si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3)$$

es lineal.

Sol. Intentemos comprobar las condiciones de transformación lineal.

(1) Preservación de suma: sean $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f((x_1,x_2,x_3) + (y_1,y_2,y_3)) &= f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ &= (x_1 + y_1 - 2(x_2+y_2), x_2 + y_2 + 3(x_3+y_3)) \end{aligned}$$

, por otro lado

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)+f(y_1,y_2,y_3) &= (x_1-2x_2,x_2+3x_3)+(y_1-2y_2,y_2+3y_3)\\ &= (x_1-2x_2+y_1-2y_2,x_2+3x_3+y_2+3y_3)\\ &= (x_1+y_1-2(x_2+y_2),x_2+y_2+3(x_3+y_3))\\ &= f(x_1,x_2,x_3)+f(y_1,y_2,y_3) \end{aligned}$$

por lo anterior.

(2) Preservación de escalares: sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1,x_2,x_3)) &= f(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)\\ &= (\lambda x_1-2\lambda x_2,\lambda x_2+3\lambda x_3)\\ &= \lambda(x_1-2x_2,x_2+3x_3)\\ &= \lambda f(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

$$\therefore f \text{ es lineal.}$$

Nótese que

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

□

Teorema 20. *Sean V, W espacios vectoriales y $T: V\to W$ transformaciones lineales, entonces*

(1) $T(0)=0$

(2) *Para cualesquiera $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ se tiene que $T(\mathbf{v}-\mathbf{w})=T(\mathbf{v})-T(\mathbf{w})$.*

Demostración.

(1) Tenemos que

$$T(0)=T(0+0)=T(0)+T(0)$$

es decir $T(0)=T(0)+T(0)$. Sumando $-T(0)$ a ambos lados de ésta ecuación, se obtiene que

$$0=T(0).$$

(2) Sean $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$. Entonces

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}-\mathbf{w}) &= T(\mathbf{v}+(-1)\mathbf{w})\\ &= T(\mathbf{v})+T((-1)\mathbf{w})\\ &= T(\mathbf{v})+(-1)T(\mathbf{w})\\ &= T(\mathbf{v})-T(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 105. Determinar si las siguientes funciones son lineales ó no.

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$.

(2) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $T(x,y)=(x+y,y+1)$.

(3) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2$.

Sol.

(1) $f(0) = e^0 = 1 \neq 0$, entonces f no es lineal.
(2) $T(0,0) = (0,1) \neq (0,0)$, entonces T no es lineal.
(3) Tenemos que $g(0) = 0$, pero esto no indica que g es lineal, pues no lo es porque g no preserva la suma:

$$\underbrace{g(1+1)}_{4} \neq \underbrace{g(1)}_{1} + \underbrace{g(1)}_{1}$$

$\square$

Que en las transformaciones lineales aparezcan matrices, como se vió en varios ejemplos anteriores, no es casual.

Teorema 21. *Si A es matriz $m \times n$ y los vectores de $\mathbb{R}^n$ los escribimos como vectores columna, la función $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por*

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

es una transformación lineal.

Demostración.

(1) T preserva sumas: si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios,

$$\begin{aligned} T_A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= A(\mathbf{u}+\mathbf{v}), && \text{por definición de } T_A \\ &= A\mathbf{u} + A\mathbf{v}, && \text{por distributiva del producto de matrices} \\ &= T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

(2) T preserva escalares: si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned} T_A(\lambda\mathbf{u}) &= A\lambda\mathbf{u}, && \text{por definición de } T_A \\ &= \lambda A\mathbf{u}, && \text{pues } \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \lambda T_A(\mathbf{u}) && \text{por definición de } T_A \end{aligned}$$

$\square$

3. Transformaciones lineales y bases

El nombre y el concepto de vectores básicos, es porque en ellos se encuentra la información esencial no sólo de la estructura algebraica de los espacios vectoriales sino de las construcciones sobre ellos. Por ejemplo de las transformaciones lineales, como se vé en el siguiente teorema.

Teorema 22. *Sean V, W espacios vectoriales y $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de V. Toda transformación lineal $T : V \to W$ está completamente determinanda por $T(\mathbf{v}_1), \ldots T(\mathbf{v}_n)$, es decir, para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{v})$ se calcula en términos de $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$.*

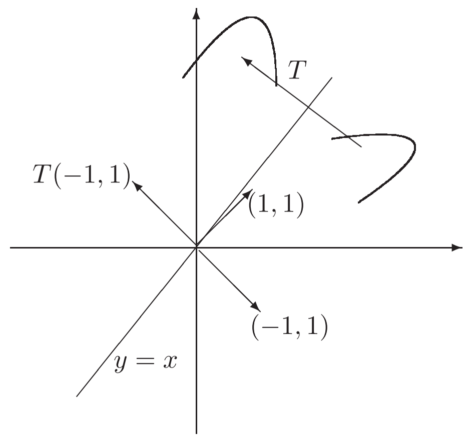
Demostración. Sea $\mathbf{v} \in V$ arbitrario. Como $V = \operatorname{gen}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, entonces

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n$$

$\square$

Ejemplo 106. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que T "refleja" a través de la recta $y = x$. Calcular $T(2,4)$ y $T(a,b)$ para a, b cualesquiera.

Sol. Tenemos que $(1,1)$ está en la recta $y = x$, luego $T(1,1) = (1,1)$. Además $(-1,1)$ es perpendicular a $y = x$, por lo que $T(-1,1) = (-1,1)$.



Además $(1,1)$ y $(-1,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

luego $(2,4)$ se puede escribir como combinación lineal de $(1,1)$ y $(-1,1)$:

$$(2,4) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(-1,1)$$

es decir,

$$\begin{cases} 2 &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ 4 &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

de donde $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$. Por lo que

$$(2,4) = 3(1,1) + 1(-1,1)$$

y entonces

$$\begin{aligned} T(2,4) &= 3T(1,1) + T(-1,1) \\ &= 3(1,1) + (-1,1) \\ &= (4,2) \end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{T(2,4) = (4,2)}.$$

En general, para $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, como $\mathbb{R}^2 =$gen$((1,1),(-1,1))$ se puede escribir

$$(a,b) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(-1,1)$$

luego

$$\begin{cases} a &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ b &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

por lo que

$$\lambda_1 = \frac{a+b}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{b-a}{2},$$

de donde

$$(a,b) = \frac{a+b}{2}(1,1) + \frac{b-a}{2}(-1,1)$$

y así

$$\begin{aligned} T(a,b) &= \frac{a+b}{2}T(1,1)\frac{b-a}{2}T(-1,1) \\ &= \frac{a+b}{2}(1,1)+\frac{b-a}{2}(1,-1) \\ &= (b,a) \end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{T(a,b)=(b,a)}$$

□

TAREA 34.

(1) *Sea* $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *lineal tal que* $T(1,2)=3$ *y* $T(2,3)=-1$. *Hallar* $T(-1,1)$ *y en general* $T(a,b)$.
(2) *Sea* $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *definida por* $T(3,1)=(0,0)$ *y* $T(1,1)=(0,2)$. *Calcular* $T(a,b)$
(3) *Sea* $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *transformación lineal que refleja a través de la recta* $y=-3x$. *Calcular* $T(2,4)$.
(4) *Sea* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *transformación lineal que refleja a través del plano* $x+y+z=0$. *Calcular* $T(1,2,3)$.
(5) *Sea* $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *función tal que refleja a través de la recta* $y=x+1$. *Pruebe que* T *NO es lineal. Calcule* $T(-1,3)$ *y en general* $T(a,b)$.

4. Proyecciones

Junto con las rotaciones, las llamadas *proyecciones* son transformaciones lineales de uso común. Queremos encontrar fórmulas generales para proyectar vectores en subespacios. Por ejemplo, podemos pensar que el "mundo real" está inmerso en $\mathbb{R}^3$, y es común representar los objetos en $\mathbb{R}^3$ (en 3D) en la pantalla de un computador (o en el pizarrón de clases), donde tal pantalla se piensa que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2. La forma de representar tales objetos no es más que aplicar una transformación lineal $P:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que la imagen de P es un subespacio de dimensión 2.

Primero calcularemos fórmulas para el caso $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ donde P proyecta todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ en una recta L que pasa por el origen. Sea $\mathbf{v}$ el vector dirección de tal recta. Por comodidad, normalizamos tal vector, esto es consideramos $\mathbf{v}/||\mathbf{v}||$, el cual tiene norma uno:

$$\left|\left|\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}\right|\right| = \frac{1}{||\mathbf{v}||}||\mathbf{v}|| = 1.$$

En lo que sigue, los vectores se considerarán como vectores columna. De la figura 1, obtenemos que para cualquier $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^2$, se debe cumplir

$$P(\mathbf{w}) = \lambda\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$$

para algún escalar λ. De la misma figura se obtiene que

$$\cos(\alpha) = \frac{\lambda}{||\mathbf{w}||}$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Recordemos que $\cos(\alpha) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})/(||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||)$, por lo que

$$\begin{aligned} P(\mathbf{w}) &= \cos(\alpha)\,||\mathbf{w}||\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \\ &= \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||}\,||\mathbf{w}||\,\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} \\ &= \frac{1}{||\mathbf{v}||^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} \end{aligned}$$

Ahora nótese que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}^t\mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}^t$ es la matriz transpuesta de $\mathbf{v}$.

4.1. Proyección de un cubo en un plano.

Maxima

```
load(draw);
```

Maxima

```
makelist([k,k],k,1,10);
```

Maxima

```
l(m):=block([d:1/m],makelist([k*d,0,0],k,0,m));
```

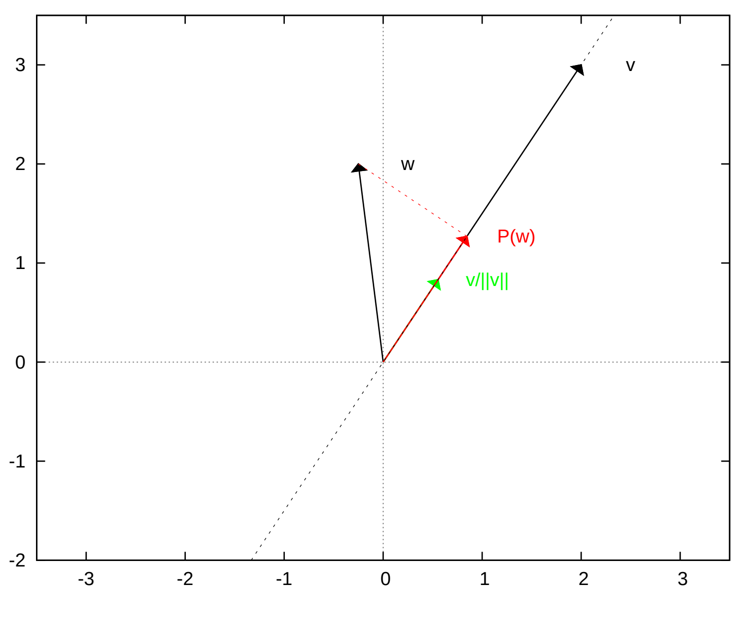


Figure 1. La proyección sobre una recta.

Maxima

```
s1(10);
```

Maxima

```
draw3d(points(s1(20)),points(s2(20)));
```

Maxima

```
s2(m):=block([d:1/m],makelist([0,k*d,0],k,0,m));
```

Maxima

```
s3(m):=block([d:1/m],makelist([1,k*d,0],k,0,m));
```

Maxima

```
s4(m):=block([d:1/m],makelist([k*d,1,0],k,0,m));
```

Maxima

```
r1(m):=block([d:1/m],makelist([k*d,0,1],k,0,m));
```

Maxima

```
r2(m):=block([d:1/m],makelist([0,k*d,1],k,0,m));
```

Maxima

```
r3(m):=block([d:1/m],makelist([1,k*d,1],k,0,m));
```

Maxima

```
r4(m):=block([d:1/m],makelist([k*d,1,1],k,0,m));
```

Maxima

```
c1(m):=block([d:1/m],makelist([0,0,k*d],k,0,m));
```

Maxima

```
c2(m):=block([d:1/m],makelist([0,1,k*d],k,0,m));
```

Maxima

```
c3(m):=block([d:1/m],makelist([1,0,k*d],k,0,m));
```

Maxima

```
c4(m):=block([d:1/m],makelist([1,1,k*d],k,0,m));
```

Maxima

```
l1:s1(20);
```

Maxima

```
l2:s2(20)$
```

Maxima

```
l3:s3(20)$
```

Maxima

```
l4:s4(20)$
```

Maxima

```
r1:r1(20)$ r2:r2(20)$ r3:r3(20) $ r4:r4(20)$
```

Maxima

```
c1:c1(20) $ c2:c2(20) $ c3:c3(20) $ c4:c4(20)$
```

Maxima

```
draw3d(points(l1),points(l2),points(l3),points(l4),
       points(r1),points(r2),points(r3),points(r4),
points(c1),points(c2),points(c3),points(c4)
);
```

Maxima

```
correc(v):=matrix([v[1]],[v[2]],[v[3]]);
```

Maxima

```
correc([1,2,3]);
```

Maxima

```
des(v):=[v[1,1],v[2,1],v[3,1]];
```

Maxima

```
A:transpose(matrix([1,2,3],[0,3,4]));
```

Maxima

```
P:A.invert(transpose(A).A).transpose(A);
```

Maxima

```
T(v):=P.v;
```

Maxima

```
l1;
```

Maxima

```
map(F,l1);
```

Maxima

```
map(T,l1);
```

Maxima

```
map(des,%);
```

Maxima

```
draw3d(points(%));
```

Maxima

```
map(T,%);
```

Maxima

```
map(des,%);
```

Maxima

```
tl1:%;
```

Maxima

```
map(correc,l2);
```

Maxima

```
map(T,%);
```

Maxima

```
map(des,%);
```

Maxima

```
tl2:%;
```

Maxima

```
tl3:map(des,map(T,map(correc,l3)));
```

Maxima

```
ptos(lista):=map(des,map(T,map(correc,lista)));
```

Maxima

```
tl4:ptos(l4);
```

Maxima

```
tr1:ptos(r1)$ tr2:ptos(r2) $tr3:ptos(r3) $ tr4:ptos(r4)$
```

Maxima

```
tc1:ptos(c1)$ tc2:ptos(c2) $tc3:ptos(c3) $ tc4:ptos(c4)$
```

Maxima

```
draw3d(color=green,points(l1),color=black,points(l2),points(l3),points(l4),
       points(r1),points(r2),points(r3),points(r4),
points(c1),points(c2),points(c3),points(c4),
color=red,
points(tl1),points(tl2),points(tl3),points(tl4),
```

```
points(tr1),points(tr2),points(tr3),points(tr4),
points(tc1),points(tc2),points(tc3),points(tc4)
);
```

5. Transformaciones lineales y matrices

El siguiente teorema junto con el teorema 21 muestra que las transformaciones lineales sobre $\mathbb{R}^n$ son justamente las matrices.

TEOREMA 23. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. Entonces existe una matriz A_T de orden $m \times n$ tal que*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad T(\mathbf{v}) = A_T\mathbf{v}$$

($\mathbf{v}$ vector columna) de hecho A_T se puede formar de los vectores $T(\mathbf{e}_1), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ como columnas.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, entonces $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$. Luego

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

y entonces

$$T(\mathbf{v}) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n). \tag{30}$$

Podemos poner

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\ T(\mathbf{e}_2) &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) \\ &\vdots \\ T(\mathbf{e}_n) &= (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned}$$

y entonces sustituir en (**??**) para obtener

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= x_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) + x_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) + \cdots + x_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n}, x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n}, \\ &\ldots, x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \cdots + x_na_{mn}a_{mn}) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= (\sum_{i=1}^{m} x_ia_{i1}, x_2\sum_{i=1}^{m} x_ia_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_ia_{in}) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= A_T\mathbf{v} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{v}$ es vector columna y

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Nótese que si escribimos $T(\mathbf{e}_1), \ldots T(\mathbf{e}_n)$ como columnas

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, T(\mathbf{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

que son las columnas que forman a A_T. $\square$

Ejemplo 107. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2 + x_4, x_1 + x_3 - x_4, 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4).$$

Hallar la representación canónica de T.

Sol. Tenemos que

$$\begin{aligned} T(1,0,0,0) &= (1,1,4) \\ T(0,1,0,0) &= (-2,0,-2) \\ T(0,0,1,0) &= (0,0,3) \\ T(0,0,0,1) &= (2,-1,-1) \end{aligned}$$

luego la representación canónica A_T es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

esto significa que

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$\square$

Definición 108. *Sea $T : V \to W$ transformación lineal con $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ bases finitas (ordenadas) de V y W respectivamente:*

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n), \quad \mathcal{B}' = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m).$$

Entonces, la **representación matricial** *de T con respecto a las bases $\mathcal{B}$y $\mathcal{B}$' es la matriz denotada $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ y que se obtiene de poner los vectores $T(\mathbf{v}_1)_{\mathcal{B}'}, \ldots, T(\mathbf{v}_n)_{\mathcal{B}'}$ como sus columnas. Esto es: si*

$$T(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m \tag{31}$$

$$T(\mathbf{v}_2) = a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m \tag{32}$$

$$\vdots$$

$$T(\mathbf{v}_n) = a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m \tag{33}$$

entonces

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En principio, para calcular una representación matricial, hay que resolver los sistemas de ecuaciones (31), (32), …, (33) como se hizo en el ejemplo 91. Sin embargo, tales se pueden resolver juntos, cuando $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$, como se afirma en el siguiente algoritmo:

Algoritmo:

Entrada: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ transformación lineal, $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ base de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ base de $\mathbb{R}^m$;

Salida: $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

PROCEDIMIENTO()

1 Formar la matriz aumentada con vectores $A = (\mathbf{w}_1 \ldots \mathbf{w}_m | T(\mathbf{v}_1) \ldots T(\mathbf{v}_n))$ como columnas

2 Reducir A, mediante Gauss-Jordan a una matriz de la forma $\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{array}\right)$

3 $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$

EJEMPLO 109. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_2, 3x_1 - x_2 - x_3).$$

Hallar $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ donde

$$\mathcal{B} = \big((1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, -1, 1)\big)$$
$$\mathcal{B}' = \big((1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\big)$$

SOL. Tenemos

$$T(1, 0, 0) = (2, 1, 3)$$
$$T(1, 1, 1) = (3, 2, 1)$$
$$T(1, -1, 1) = (5, 0, 3)$$

luego se pone

$$\big(\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \quad | \quad T(\mathbf{v}_1) \quad T(\mathbf{v}_2) \quad T(\mathbf{v}_3))\big) \sim \big(I \quad | \quad [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\big)$$

es decir,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -5 & 7 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -6 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\therefore [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

□

TAREA 35.

(1) *Hallar la representación matricial canónica de la transformación dada T y la representación $[T]_B^{B'}$.*

(a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (2x-3y, x+y)$

$$B = ((1,1),(1,0)), \quad B' = ((0,1),(1,1))$$

(b) $T:\mathbb{R}^{\to}\mathbb{R}^3$ *definida por* $T(x,y) = (2x+y, x+2y, x-3y)$

$$B = ((1,0),(0,1)), \quad B' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)))$$

(c) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2+x_3, x_1, x_2+x_3)$,

$$B = ((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)), \quad B' = ((0,1,1),(1,1,0),(1,0,1))$$

(d) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2+3x_3, x_1)$

$$B = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)), \quad B' = ((1,1),(1,2))$$

Nótese que en el ejemplo anterior la representación canónica de T es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

que es diferente a la representación obtenida; sin embargo no es tan diferente. Tal similaridad viene descrita por medio de la llamadas *matrices de cambio de base*.

DEFINICIÓN 110. *Sea V espacio vectorial. Se define* **la transformación identidad como**

$$Id_V : V \to V, \quad Id_V(v) = v.$$

PROPIEDAD 14. *La identidad $Id_V : V \to V$ es lineal.*

Como Id_V es lineal, tiene representaciones como matriz, cuando V es de dimensión finita.

DEFINICIÓN 111. *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases finitas y ordenadas de V. Se define la* **matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$'** *como*

$$[Id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Si

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n), \quad \mathcal{B}' = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$$

entonces la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$' se puede calcular con el algoritmo descrito anteriormente. Es decir, el cálculo comienza con poner la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n & | & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 112. Sean

$$\mathcal{B} = \big((1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\big), \quad E = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big).$$

Calcular la matriz de cambio de base de E en $\mathcal{B}$.

Sol. Se pone: (y se aplica Gauss-Jordan),

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

lo que indica que la matriz de cambio de base es

$$[Id_{\mathbb{R}^3}]_E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

□

Tarea 36. *Hallar la matriz de cambio de base de B a B' y de B' a B:*

(1) $B = ((1,1),(1,0))$, $B' = ((0,1),(1,1))$ *bases de* $\mathbb{R}^2$.
(2) $B = ((2,3,1),(1,2,0),(2,0,3))$, $B' = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ *bases de* $\mathbb{R}^3$.
(3) $B = ((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ *y* $B' = ((0,1,1),(1,1,0),(1,0,1))$ *bases de* $\mathbb{R}^3$
(4) $B = ((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0))$ *y* B' *la base canónica de* $\mathbb{R}^4$.

Recordemos la composición de funciones: si $f : A \to B$, $g : B \to C$ son funciones, entonces su **composición** es

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Ejemplo 113. Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ funciones definidas por

$$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3, x_1+x_2, x_3), \quad T'(x_1,x_2,x_3) = (2x_1-x_2, x_2+x_3, 2x_3-x_2).$$

(1) Hallar fórmulas para $T' \circ T$ y $T \circ T'$.
(2) Hallar las representaciones matriciales $A_{T\circ T'}$, $A_{T'\circ T}$.
(3) Hallar las representaciones matriciales canónicas A_T y $A_{T'}$.
(4) Calcular los productos $A_T A_{T'}$ y $A_T A_T$. Comparar con el inciso (2).

Sol.

(1) Por definición

$$\begin{aligned}(T' \circ T)(x_1,x_2,x_3) &= T'(T(x_1,x_2,x_3)) \\ &= T'(x_1+x_2+x_3, x_1+x_2, x_3) \\ &= (2(x_1+x_2+x_3) - (x_1+x_2), x_1+x_2+x_3, 2x_3 - (x_1+x_2)) \\ &= (x_1+x_2+2x_3, x_1+x_2+x_3, 2x_3-x_1-x_2),\end{aligned}$$

esto es

$$\boxed{(T' \circ T)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + x_3, 2x_3 - x_1 - x_2).}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(T \circ T')(x_1, x_2, x_3) &= T(T'(x_1, x_2, x_3)) \\
&= T(2x_1 - x_2, x_2 + x_3, 2x_3 - x_2) \\
&= ((2x_1 - x_2) + (x_2 + x_3) + (2x_3 - x_2), (2x_1 - x_2) + (x_2 + x_3), 2x_3 - x_2) \\
&= (2x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3, 2x_3 - x_2)
\end{aligned}$$

esto es

$$\boxed{(T \circ T')(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3, 2x_3 - x_2).}$$

(2) Tenemos que

$$\begin{aligned}
T' \circ T(1, 0, 0) &= (1, 1, -1) \\
T' \circ T(0, 1, 0) &= (1, 1, -1) \\
T' \circ T(0, 0, 1) &= (2, 1, 2)
\end{aligned}$$

luego

$$A_{T' \circ T} = \big(?\big)$$

□

Definición 114. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se define*

(1) *el* **núcleo** *de T como*

$$\text{Ker } T = \{\mathbf{v} \in V \,|\, T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

(2) *el* **rango** *o* **imagen** *de T como*

$$\text{Im } T = \{T(\mathbf{v}) \,|\, v \in V\}$$

Ejemplo 115. *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x+y, x-y+z)$. Tal T es lineal. Entonces $(1, -1, -2) \in$ Ker T pues $T(1, -1, -2) = (0, 0)$. Además $(2, 1) \in$ Im T pues $(2, 1) = T(1, 1, 1)$.*

Ejemplo 116. *Sean $\mathcal{D} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f$ es función derivable$\}$ y $\mathcal{F}$ es espacio vectorial de las funciones reales de variable real. y $T : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, $T(f) = df/dx$. Sabemos que T es lineal. Luego, la función constante $f = 1$ está en el núcleo de T pues,*

$$T(1) = 0$$

además, la función exponencial $g(x) = e^x$ está en el rango de T, pues

$$e^x = T(e^x)$$

Propiedad 15. *Sea $T : V \to W$ lineal. Entonces Im T y Ker T son subespacios de W y V respectivamente.*

Demostración.

(1) Ker T es subespacio:
  (a) $\mathbf{0} \in$ Ker T pues $T(\mathbf{0}) = 0$.

(b) si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \operatorname{Ker} T$ entonces $T(\mathbf{v}) = 0$, $T(\mathbf{w}) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

lo que implica que $\mathbf{v}+\mathbf{w} \in \operatorname{Ker} T$.

(c) si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} T$ entonces $T(\mathbf{v}) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} T(\lambda\mathbf{v}) &= \lambda T(\mathbf{v}) \\ &= \lambda\mathbf{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que $\lambda\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} T$.

(2) Im T es subespacio: tarea.

□

Ejemplo 117.

Definición 118. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matriz $n \times n$. Se define la **traza** *de A como*

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

La traza es un funcioón Tr: $M(n,n) \to \mathbb{R}$ lineal pues preserva la suma: si $A = (a_{ij})$, $B = (bij)$ son matrices $n \times n$ entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(A+B) &= \operatorname{Tr}(a_{ij} + b_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B \end{aligned}$$

y además, la traza preserva el producto por escalares: si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in M(n,n)$ entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}\ (\lambda A) &= \operatorname{Tr}\ (\lambda a_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\ &= \lambda \operatorname{Tr}(A) \end{aligned}$$

Entonces, si sl_n es el conjunto de las matrices $n \times n$ de traza cero, sl_n es un subespacio pues $sl_n =$Ker Tr.

TAREA 37. (1) *Hallar la representación matricial canónica A de T y $D = [T]_B^B$ para la base B dada. Además, encontrar una matric C tal que*

$$D = C^{-1}AC$$

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 3y, x + y)$, $B = ((1, 1), (1, -1))$.
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - y, 2x)$, $B = ((2, 1), (1, 2))$.
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + x_3)$, $B = ((1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$.
(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$, $B = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$

(2) *Hallar los valores propios y vectores propios correspondientes.*
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 3y, -3x + 2y)$.
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - y, -x + y)$
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 4x_2 + 7X_3, 2X_2 - X_3)$
(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3, -2x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 + 4x_3)$